

Basisprüfung in Mechanik

D-MAVT, D-BAUG

1. schriftliche Prüfung

Prof. J. Dual, Prof. E. Mazza

14:00 - 14:45

10. August 2011

Name	Vorname	ETH-Nummer	Studiengang
------	---------	------------	-------------

	A. 1	A. 2	A. 3	A. 4					Punkte	Note
1. Korrektur										
Assistent										
2. Korrektur										
Assistent										

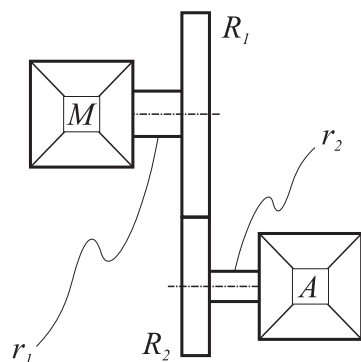
Hinweise

- Die Prüfung besteht aus 4 Aufgaben, die zusammen 28 Punkte ergeben.
- **Bitte keine roten oder grünen Farben verwenden, dies sind unsere Korrekturfarben.**
- Durchgestrichene oder unleserliche Lösungsteile werden nicht bewertet.
- Lösungsweg und Resultat nachvollziehbar darlegen.
- Bei Täuschungsversuchen gilt die Disziplinarordnung der ETH: Unter anderem kann die Prüfung für nicht bestanden erklärt werden.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Motor M treibt eine Welle mit n Umdrehungen pro Minute an und gibt dabei eine mechanische Leistung P ab. Auf dieser Welle ist ein Rad mit Radius R_1 befestigt, womit über ein zweites Rad (Radius R_2) eine zweite Welle angetrieben wird. Die Räder rollen ohne Schlupf aufeinander ab. Die Radien der beiden Räder haben ein Verhältnis von $\frac{R_1}{R_2} = 2$. Die zweite Welle gibt die gesamte Leistung an den Abtrieb A weiter. Die beiden Wellen haben einen kreisförmigen Vollquerschnitt. Das für die Wellen verwendete Material hat eine zulässige Schubspannung τ_{zul} .

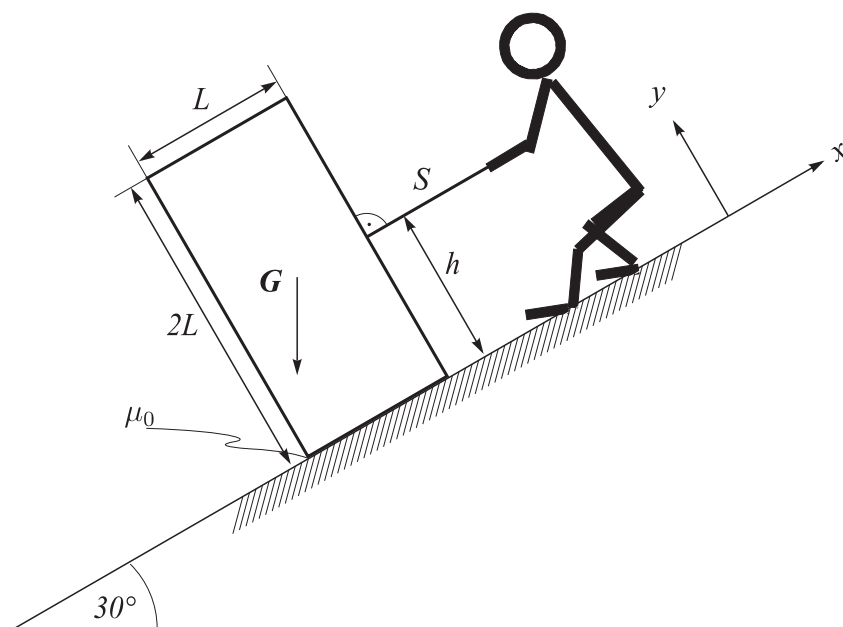
Berechnen Sie den notwendigen Radius r_2 der Welle 2, damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird. Die Biegebeanspruchung soll nicht berücksichtigt werden.



Aufgabe 2 (7 Punkte)

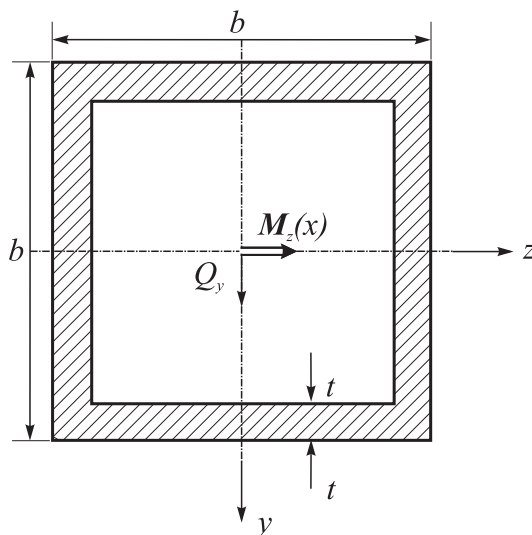
Eine Person versucht eine ruhende, homogene, rechteckige Kiste mit Gewichtskraft G , Höhe $2L$ und Breite L eine schiefe Ebene mit Neigung 30° hochzuziehen. Die Person zieht die Kiste an einem Seil S , das zum betrachteten Zeitpunkt parallel zur schiefen Ebene ausgerichtet ist. Der Reibungskoeffizient zwischen Ebene und Kiste beträgt $\mu_0 = \mu_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, die Person rutscht nicht.

Auf welcher Höhe h darf das Seil maximal befestigt sein, damit die Kiste ohne zu Kippen hochgezogen werden kann?



Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben ist der dargestellte Querschnitt eines Stabträgers an der Stelle x . Die eingezeichneten Beanspruchungskomponenten $M_z > 0$ und $Q_y > 0$ wirken am Flächenmittelpunkt des Querschnitts.

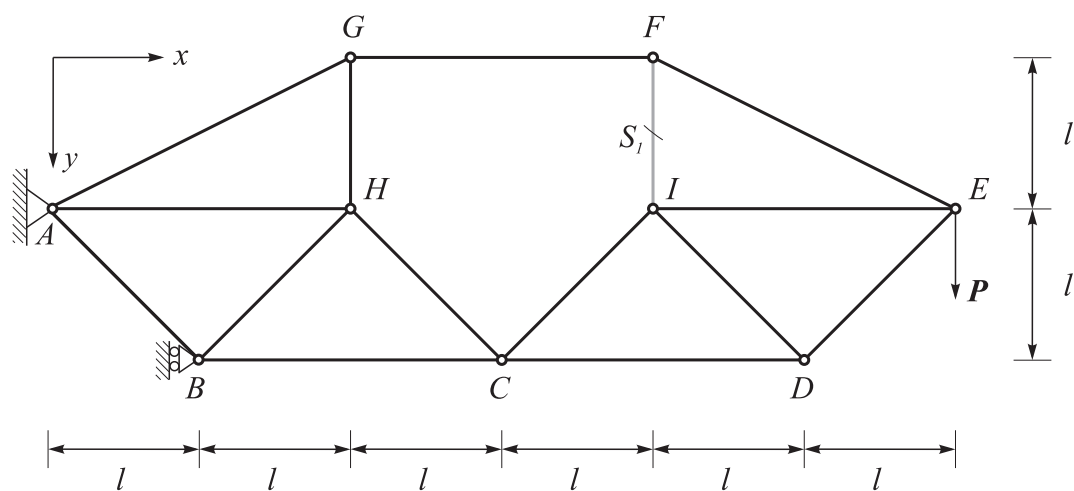


- Geben Sie eine Approximation für das Flächenträgheitsmoment I_z an, für $b \gg t$. Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung $\geq t^2$.
- Wie gross ist die maximale Druckspannung in x -Richtung im Querschnitt und wo findet man diese?
- Zeichnen Sie qualitativ die Schubspannungsrichtung mit Pfeilen in das Querschnittsprofil ein und geben Sie eine begründete Abschätzung für die maximale Schubspannung τ_{xy} im Querschnitt.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

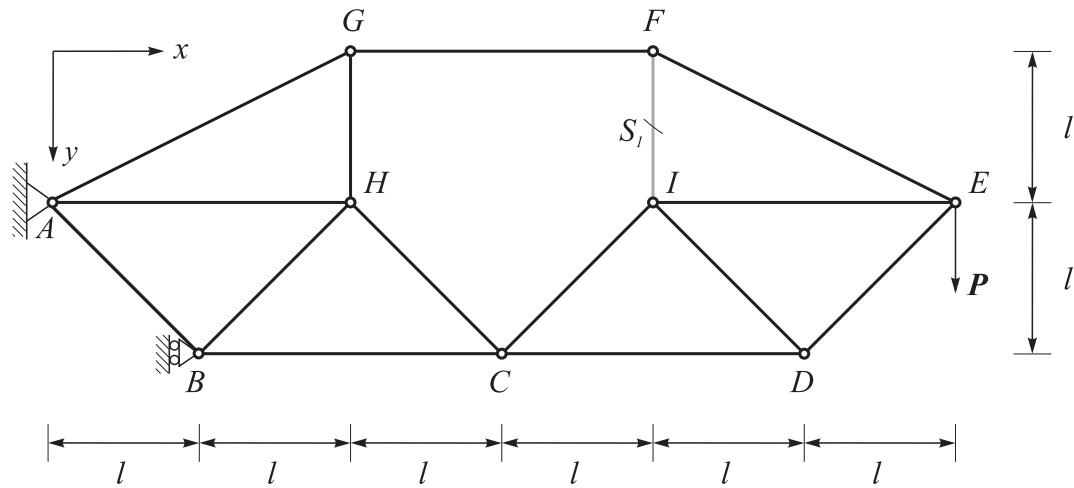
Gegeben ist das untenstehende, ideale Fachwerk, bestehend aus 15 gelenkig gelagerten Pendelstützen. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen. Im Punkt A ist das Fachwerk gelenkig gelagert, im Punkt B ist das Fachwerk durch ein Auflager gestützt und im Punkt E wirkt die Kraft \mathbf{P} . Das Lager in B kann nicht abheben.

Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistung die Stabkraft S_1 .



Skizzenblatt zur Aufgabe 4

Es wird nur eine Skizze bewertet. Nicht zu bewertende Skizzen durchstreichen.



Basisprüfung in Mechanik

D-MAVT, D-BAUG

2. schriftliche Prüfung

Prof. J. Dual, Prof. E. Mazza

15:00 - 16:45

10. August 2011

Name	Vorname	ETH-Nummer	Studiengang
------	---------	------------	-------------

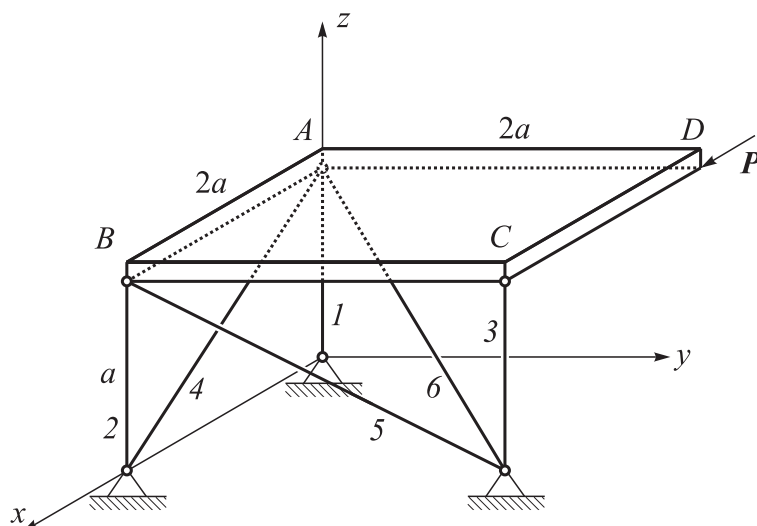
	A. 1	A. 2	A. 3						Punkte	Note
1. Korrektur										
Assistent										
2. Korrektur										
Assistent										

Hinweise

- Die Prüfung besteht aus 3 Aufgaben, die zusammen 53 Punkte ergeben.
- **Bitte keine roten oder grünen Farben verwenden, dies sind unsere Korrekturfarben.**
- **Für jede Aufgabe ein separates Blatt des ausgeteilten ZfM-Institutspapieres verwenden und dieses mit Namen, ETH- und Aufgabennummer beschriften.**
- **Lösungsteile auf den Aufgabenblättern werden nicht bewertet.**
- Durchgestrichene oder unleserliche Lösungsteile werden nicht bewertet.
- Lösungsweg und Resultat nachvollziehbar darlegen.
- Bei Täuschungsversuchen gilt die Disziplinarordnung der ETH: Unter anderem kann die Prüfung für nicht bestanden erklärt werden.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (15 Punkte)

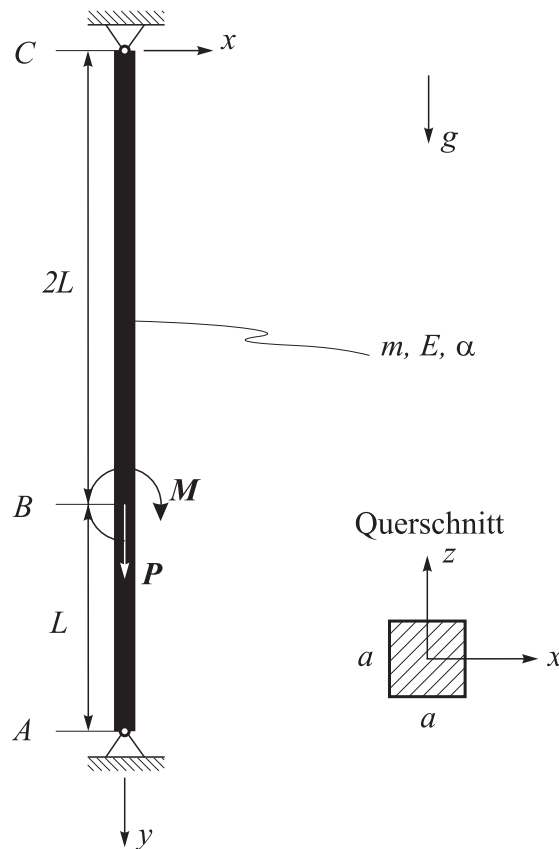
Gegeben ist eine homogene, starre, quadratische Platte, mit Seitenlänge $2a$ und vernachlässigbarem Eigengewicht. Die Platte wird durch 6 Pendelstützen in Position gehalten, deren Lage der Zeichnung zu entnehmen ist. Als einzige Belastung wirkt eine Kraft mit Betrag P im Punkt D in x -Richtung.



- Berechnen Sie alle Stabkräfte S_i
- Die Stäbe haben einen kreisförmigen Querschnitt, Elastizitätsmodul E und Flächenträgheitsmoment I . Welcher Stab würde bei steigender Last P zuerst knicken und warum? Bestimmen Sie für diesen Stab die Eulersche Knicklast.

Aufgabe 2 (22 Punkte)

Ein Stabträger mit quadratischem Querschnitt, Seitenlänge a , Länge $3L$ und homogen verteilter Masse m ist in den Punkten A und C gelenkig gelagert. Die Länge $3L$ bezeichnet die Länge des Stabes im unbelasteten Zustand. Das Material ist linear-elastisch mit Elastizitätsmodul E . Seine Längsachse ist parallel zur Vertikalen ausgerichtet. Als Belastung wirken neben der über die Länge $3L$ verteilten Masse m , im Punkt B das Biegemoment \mathbf{M} und die Kraft \mathbf{P} . Die Erdbeschleunigung hat den Betrag g und zeigt in y -Richtung.

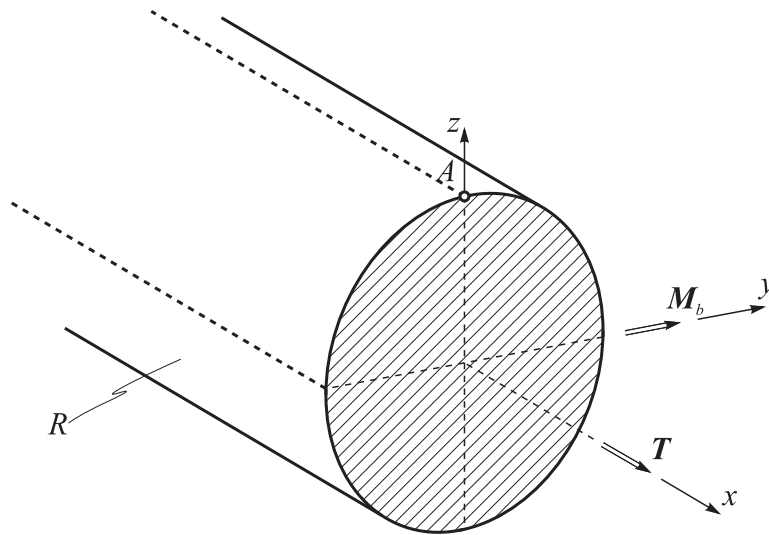


- Berechnen Sie mit Hilfe einer Energiemethode die Lagerkräfte in den Punkten A und C .
- Wie gross muss eine Temperaturänderung ΔT bei einem gegebenen Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha > 0$ sein, damit die Axialkraft in A verschwindet?
- Nach der Temperaturänderung ΔT und unter Vernachlässigung des Biegemomentes \mathbf{M} gebe man Ort und Betrag der maximalen Schubspannung an.

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Von einem Stabträger, Radius R , Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl $\nu = 0.5$ weiss man, dass die Beanspruchung aus einem Biegemoment \mathbf{M}_b in y -Richtung und einem Torsionsmoment \mathbf{T} in x -Richtung besteht. Beide Beanspruchungskomponenten sind über die gesamte Länge konstant. Weiter sind im Punkt $A = (0, 0, R)$ Dehnungen in zwei Richtungen bekannt:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon \text{ in Richtung } \underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x,y,z} \quad \varepsilon_{45} = \varepsilon \text{ in Richtung } \underline{e}_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{x,y,z}$$



Bestimmen Sie, ausgehend vom Spannungstensor, mit Hilfe des Stoffgesetzes und dem Mohrschen Dehnungskreis:

- Die Beträge der Beanspruchungskomponenten \mathbf{M}_b in y -Richtung und \mathbf{T} in x -Richtung. Geben Sie ebenfalls den Dehnungstensor $\underline{\underline{E}}_{x,y,z}$ sowie den Spannungstensor $\underline{\underline{T}}_{x,y,z}$ im Punkt A an.

Hinweis: Im Punkt A ist der Spannungszustand eben.

Musterlösung Basisprüfung vom 10. August 2011,

1. schriftliche Prüfung

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} = \frac{n\pi}{30} \\ \omega_2 &= \omega_1 \frac{R_1}{R_2} = 2\omega_1 = \frac{n\pi}{15}\end{aligned}$$

Torsionsmoment T_i :

$$T_i = \frac{P_i}{\omega_i}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Rightarrow T_1 &= 30 \frac{P}{n\pi} \\ \Rightarrow T_2 &= 15 \frac{P}{n\pi}\end{aligned}$$

Schubspannung durch Torsion berechnen:

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p} r_{max}$$

mit dem polaren Flächenträgheitsmoment

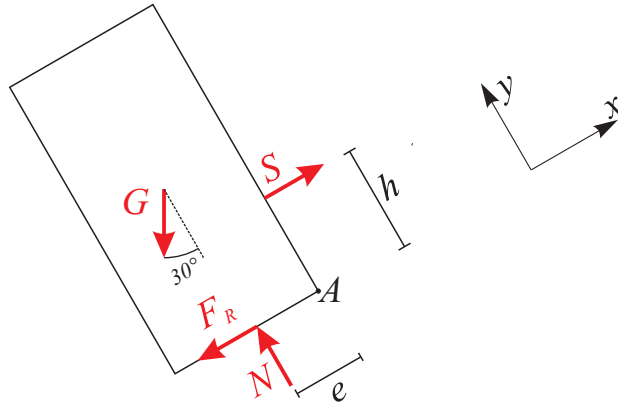
$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

folgt

$$\tau_{max} = \frac{15 \cdot P \cdot 2}{n\pi^2 r_2^3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_2 \geq \left(\frac{30P}{n\pi^2 \tau_{zulässig}} \right)^{\frac{1}{3}}}}$$

Aufgabe 2

Freischnittsskizze:



Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 : S - \frac{G}{2} - F_R = 0$$

$$\sum F_y = 0 : N - \frac{\sqrt{3}}{2}G = 0$$

$$\sum M_{Az} = 0 : \frac{G}{2}L + \frac{\sqrt{3}}{2}G\frac{L}{2} - eN - hS = 0$$

Wenn die Kiste hochgezogen wird, herrscht **Gleitreibung**: $F_R = \mu_1 N$
 Aus $\sum F_x$ und $\sum F_y$ folgt:

$$S = \frac{G}{2} + F_R = \frac{G}{2} + \mu_1 \frac{\sqrt{3}}{2}G = \frac{3}{2}G$$

Die Kiste beginnt zu **kippen** bei $e = 0$. Dann folgt aus $\sum M_{Az}$:

$$GL \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - h_{max}S = 0$$

Mit Einsetzen von S folgt:

$$\underline{\underline{h_{max} = L \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} \approx 0.6L}}$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}
 I_{z \text{ aussen}} &= \frac{b^4}{12} \\
 I_{z \text{ innen}} &= \frac{(b-2t)^4}{12} \\
 \Rightarrow \underline{\underline{I_z}} &= I_{z \text{ aussen}} - I_{z \text{ innen}} = \frac{b^4}{12} - \left(\frac{b^4}{12} - \frac{4b^3 2t}{12} + \dots t^2 \dots - \dots t^3 \dots + \dots t^4 \right) \\
 &\approx \underline{\underline{\frac{2}{3} b^3 t}}
 \end{aligned}$$

(Terme der Ordnung t^2 und höher vernachlässigt, Koeffizienten gemäss Pascalschem Dreieck)

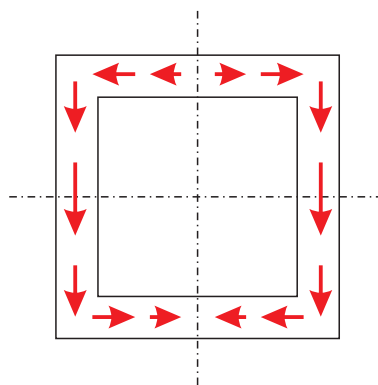
b)

$$\underline{\underline{\sigma_{max}}} = -\frac{M_z}{I_z} y_{max} = -\frac{3}{4} \frac{M_z}{b^2 t}$$

mit $y_{max} = b/2$

c) Abschätzung der Grössenordnung der Schubspannungen:

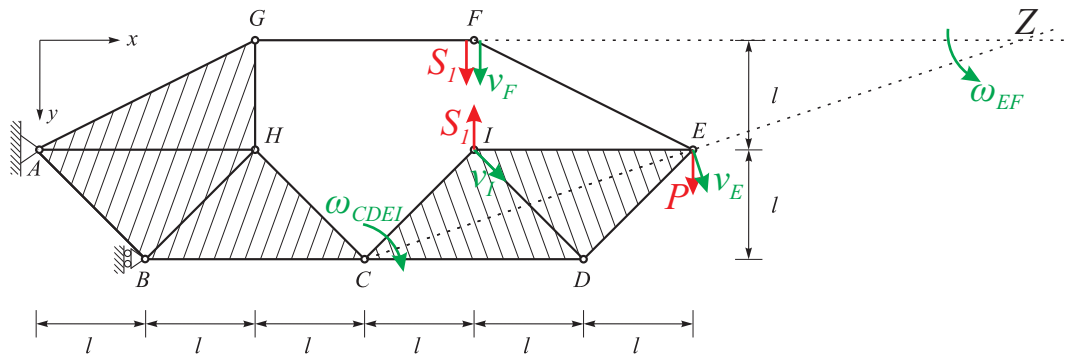
$$\begin{aligned}
 \int_A \tau_{xy} dA &= Q_y \\
 \Rightarrow \underline{\underline{\tau_{xy}}} &\approx \frac{Q_y}{2bt}
 \end{aligned}$$



Skizze Schubspannungen

Aufgabe 4

a)



Starrkörper identifizieren und sinnvollen zulässigen Bewegungszustand einführen:

Starrkörper	Momentanzentrum	ω
$ABCHG$	in Ruhe	in Ruhe
$CDEI$	C	ω_{CDEI}
FG	G	ω_{FG}
EF	Z	ω_{EF}

$$\rightarrow \underline{v_I} = \omega_{CDEI} \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{v_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{CDEI} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3l \\ -l \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_{CDEI} \begin{pmatrix} l \\ 3l \end{pmatrix} = \omega_{EF} \begin{pmatrix} l \\ 3l \end{pmatrix} \rightarrow \omega_{CDEI} = \omega_{EF}$$

$$\rightarrow \underline{v_F} = \omega_{CDEI} \begin{pmatrix} 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

PdVL:

$$\begin{aligned}
 P = 0 &= \sum \underline{F_i} \cdot \underline{v_i} \\
 &= -S_I v_{Iy} + P v_{Ey} + S_1 v_{Fy} \\
 &= (-S_1 + 3P + 5S_1) \omega_{CDEI} l \\
 \rightarrow \underline{\underline{S_1}} &= \underline{\underline{-\frac{3}{4}P}}
 \end{aligned}$$

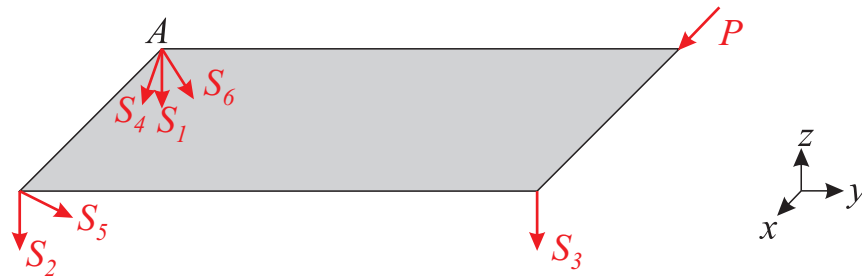
(Alternativ könnte man den Bewegungszustand auch über SdpG auf EF über ω_{FG} bestimmen.)

Musterlösung Basisprüfung vom 10. August 2011,

2. schriftliche Prüfung

Aufgabe 1

a)



Freischnittsskizze der Platte

$$\begin{aligned}\underline{S_1} &= S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \underline{S_4} &= S_4 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \underline{S_2} &= S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \underline{S_5} &= S_5 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \underline{S_3} &= S_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \underline{S_6} &= S_6 \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 : \quad \frac{2}{\sqrt{5}}S_4 + \frac{2}{3}S_6 + P = 0 \\ \sum F_y &= 0 : \quad \frac{2}{\sqrt{5}}S_5 + \frac{2}{3}S_6 = 0 \\ \sum F_z &= 0 : \quad -S_1 - S_2 - S_3 - \frac{1}{\sqrt{5}}S_4 - \frac{1}{\sqrt{5}}S_5 - \frac{1}{3}S_6 = 0\end{aligned}$$

Moment in A:

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ S_5 \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -S_2 - S_5 \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\sum M_x &= 0 : 0 - 2aS_3 + 0 = 0 \\
\sum M_y &= 0 : 2aS_2 + 2aS_5 \frac{1}{\sqrt{5}} + 2aS_3 = 0 \\
\sum M_z &= 0 : \frac{4a}{\sqrt{5}}S_5 - 2aP = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \underline{\underline{\frac{P}{2}}} \\
S_2 &= \underline{\underline{-\frac{P}{2}}} \\
S_3 &= \underline{\underline{0}} \\
S_4 &= \underline{\underline{0}} \\
S_5 &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}P}} \\
S_6 &= \underline{\underline{-\frac{3}{2}P}}
\end{aligned}$$

b) Der Stab 6 knickt zuerst, denn er ist der längste Stab und hat die grösste Drucklast.

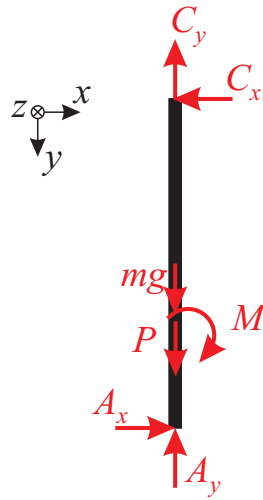
$$F_E = \frac{k\pi^2 EI}{L^2}$$

mit $k = 1$

$$\rightarrow \underline{\underline{F_E = \frac{\pi^2 EI}{9a^2}}}$$

Aufgabe 2

a)



Freischnittsskizze des Stabes. Das Problem ist 1-fach statisch unbestimmt.

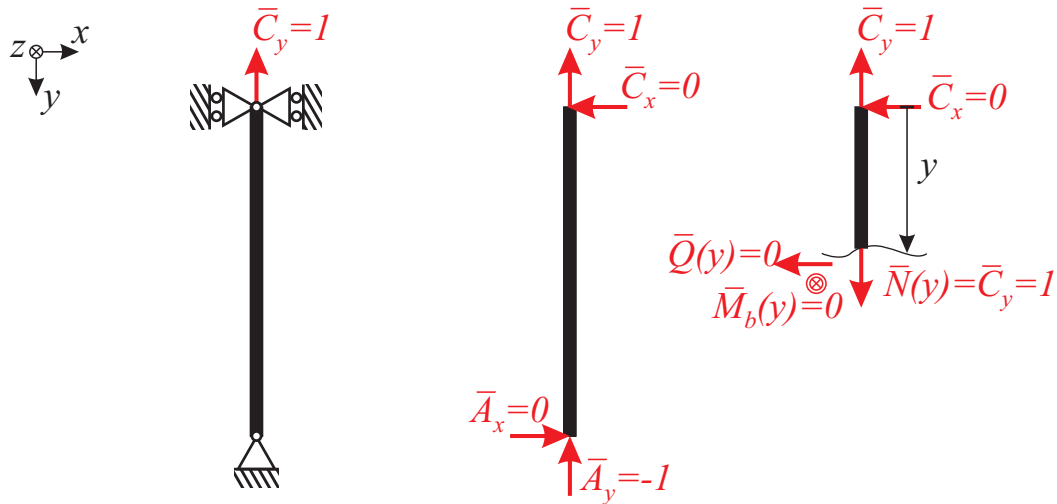
Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 : A_x - C_x = 0$$

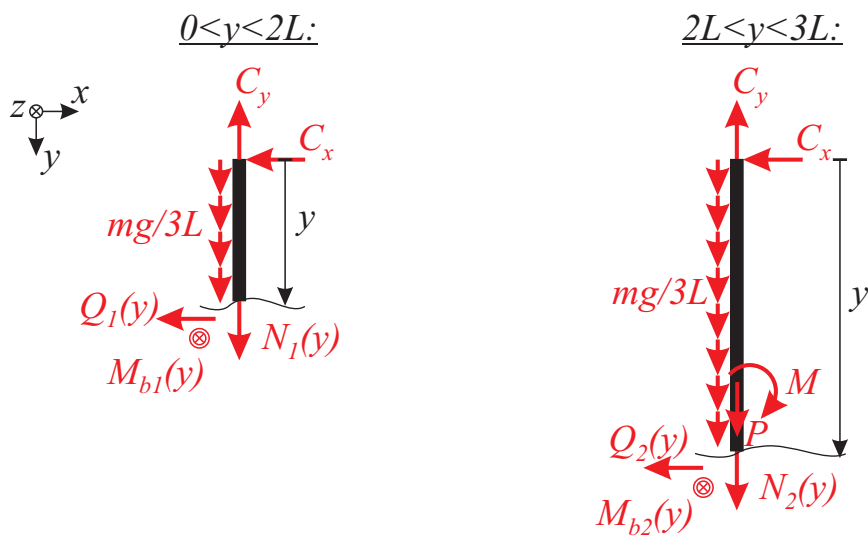
$$\sum F_y = 0 : -A_y - C_y + P + mg = 0$$

$$\sum M_{Az} = 0 : M - 3LC_x = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{C_x = \frac{M}{3L} = A_x}}$$

Variante 1: Arbeitsgleichung



Schritt 1: Statisch bestimmtes Ersatzproblem (sbEp, Notation mit \overline{Strich}): Systemskizze (links), Freischnitt (mitte), Beanspruchung (rechts). Die Belastungen mg , P und M werden beim sbEp weggelassen. $\overline{C}_x = 0 = \overline{A}_x$ ergibt sich aus dem Gleichgewicht in der mittleren Skizze, z. B. Momentenggw in A .



Schritt 2: Skizze Beanspruchung reales System

Beanspruchung reales System:

$$\begin{aligned} 0 < y < 2L : \quad N_1(y) &= C_y - \frac{mg}{3L}y \\ 2L < y < 3L : \quad N_2(y) &= C_y - \frac{mg}{3L}y - P \end{aligned}$$

(Die Berechnung von $M_{b1}(y)$, $M_{b2}(y)$ wird weggelassen, da diese wegen $\overline{M}_b(y) = 0$ später sowieso aus der Berechnung wegfallen)

Die Verschiebung v_{Cy} bei C in y -Richtung ergibt sich gemäss Theorem der virtuellen Arbeit und wird wegen dem Lager $= 0$ gesetzt:

$$\begin{aligned} v_{Cy} = 0 &= \int_0^{3L} \overline{N}(y) \frac{N(y)}{EA} dy \\ &= \int_0^{2L} 1 \cdot \frac{C_y - \frac{mg}{3L}y}{Ea^2} dy + \int_{2L}^{3L} 1 \cdot \frac{C_y - \frac{mg}{3L}y - P}{Ea^2} dy \\ &= \frac{1}{Ea^2} \left\{ \left[C_y y - \frac{mg}{3L} \frac{y^2}{2} \right]_0^{2L} + \left[C_y y - \frac{mg}{3L} \frac{y^2}{2} - Py \right]_{2L}^{3L} \right\} \\ &= \frac{1}{Ea^2} \left(3C_y L - 3PL + 2PL - \frac{3mg}{2} L \right) \\ &\rightarrow \underline{\underline{C_y = \frac{mg}{2} + \frac{P}{3}}} \\ &\rightarrow \underline{\underline{A_y = \frac{mg}{2} + \frac{2P}{3}}} \end{aligned}$$

Variante 2: Castigliano

Gemäss „Skizze Beanspruchung reales System“ folgt wiederum

$$\begin{aligned} 0 < y < 2L : \quad N_1(y) &= C_y - \frac{mg}{3L}y, \quad M_{b1}(y) = C_x y = \frac{M}{3L}y \\ 2L < y < 3L : \quad N_2(y) &= C_y - \frac{mg}{3L}y - P, \quad M_{b2}(y) = \frac{M}{3L}y - M \end{aligned}$$

Deformationsenergie:

$$U = \int_0^{2L} \frac{N_1^2(y)}{2Ea^2} dy + \int_{2L}^{3L} \frac{N_2^2(y)}{2Ea^2} dy + \int_0^{2L} \frac{M_{b1}^2(y)}{2EI_z} dy + \int_{2L}^{3L} \frac{M_{b2}^2(y)}{2EI_z} dy$$

Idee: Verschiebung $v_{Cy} = 0$ im Lager C :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial C_y} &= 0 = v_{C_y} = \frac{1}{Ea^2} \left\{ \int_0^{2L} N_1(y) \frac{\partial N_1(y)}{\partial C_y} dy + \int_{2L}^{3L} N_2(y) \frac{\partial N_2(y)}{\partial C_y} dy \right\} \\
&= \frac{1}{Ea^2} \left\{ \int_0^{2L} \left(C_y - \frac{mg}{3L} y \right) \cdot 1 dy + \int_{2L}^{3L} \left(C_y - \frac{mg}{3L} y - P \right) \cdot 1 dy \right\} \\
&= \frac{1}{Ea^2} \left(2C_y L - \frac{mg}{6L} 4L^2 + 3C_y L - 3PL - \frac{mg}{6L} 9L^2 - 2C_y L + \frac{mg}{6L} 4L^2 + 2PL \right) \\
&= \frac{1}{Ea^2} \left(3C_y L - PL - \frac{3mgL}{2} \right) \\
\rightarrow \underline{\underline{C_y = \frac{mg}{2} + \frac{P}{3}}} &\quad \rightarrow \underline{\underline{A_y = \frac{mg}{2} + \frac{2P}{3}}}
\end{aligned}$$

b) Variante 1: Kräfteüberlegung

Idee: Das Lager in A soll unbelastet sein, also muss durch die Temperaturänderung eine Kraft \widetilde{A}_y superponiert werden, sodass $\widetilde{A}_y + A_y = 0$ ergibt. Mit $\widetilde{A}_y = \sigma_y a^2$, $\sigma_y = \varepsilon_y E$ und $\varepsilon_y = \alpha \Delta T$ folgt:

$$\widetilde{A}_y = \alpha \Delta T E a^2 = -A_y = -\frac{mg}{2} - \frac{2P}{3} \quad \rightarrow \Delta T = \underline{\underline{\frac{-\frac{mg}{2} - \frac{2P}{3}}{\alpha E a^2}}}$$

Variante 2: Längenänderungsüberlegung

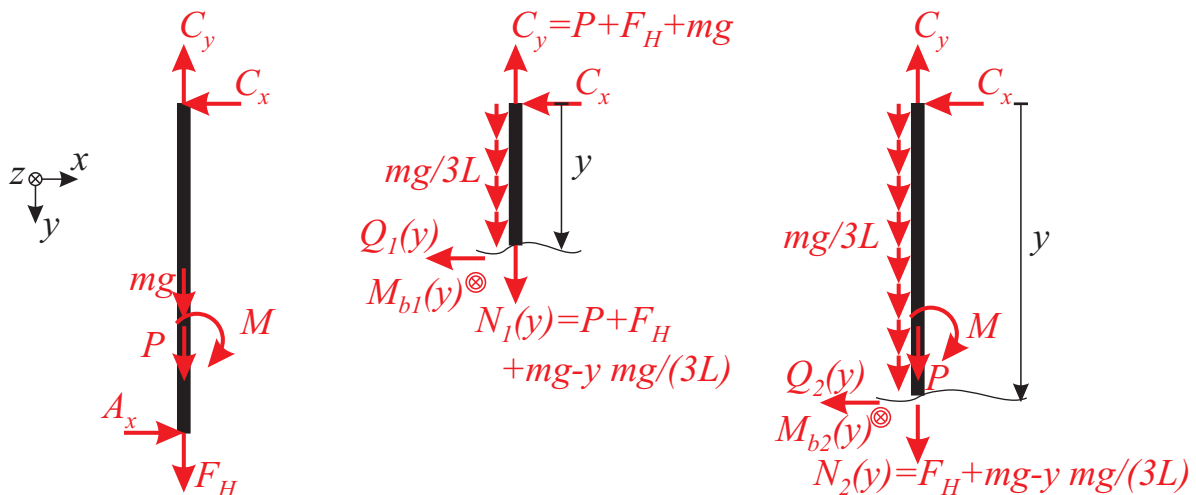
Idee: Verlängerung des Stabes superponieren mit einer Verkürzung

Mit Castigliano folgt die Verlängerung des Stabes:

Hilfskraft F_H festlegen:

$0 < y < 2L$:

$2L < y < 3L$:



Skizze zur Bestimmung der Verschiebung v_{A_y} bei A mittels Castigliano

$$\begin{aligned}
v_{Ay} = \frac{\partial U}{\partial F_H} &= \frac{1}{Ea^2} \left\{ \int_0^{2L} N_1(y) \frac{\partial N_1(y)}{\partial F_H} dy + \int_{2L}^{3L} N_2(y) \frac{\partial N_2(y)}{\partial F_H} dy \right\} \\
&= \frac{1}{Ea^2} \left(2LP + \frac{3}{2}Lmg \right)
\end{aligned}$$

Diese Verschiebung v_{Ay} muss nun kompensiert werden durch die Temperaturänderung. Mit $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_y$ und $\varepsilon_y = \alpha \Delta T$ folgt:

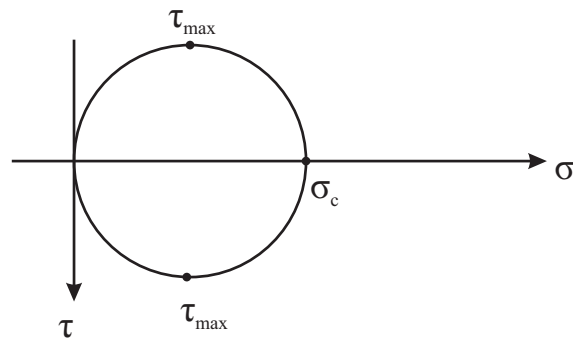
$$\begin{aligned}
v_{Ay} &= \frac{1}{Ea^2} \left(2LP + \frac{3}{2}Lmg \right) = -\alpha \Delta T 3L \\
\rightarrow \Delta T &= \underline{\underline{\frac{-\frac{mg}{2} - \frac{2P}{3}}{\alpha Ea^2}}}
\end{aligned}$$

c) Nach der Temperaturänderung ΔT wirkt bei A keine Lagerkraft mehr, so als ob dort ein freies Ende wäre. Somit ist das maximale $|\sigma_x|$ im Punkt C, wo die gesamte Gewichtskraft und P getragen wird:

$$\sigma_C = \frac{P + mg}{a^2}$$

Aus dem Mohrschen Kreis (siehe Skizze) folgt:

$$\underline{\underline{\tau_{max} = \frac{\sigma_C}{2} = \frac{P + mg}{2a^2}}}$$



Mohrscher Kreis

Aufgabe 3

Man kann sehen, dass $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ist, da weder das Torsionsmoment T noch das Biegemoment M_b diese Spannungen erzeugen. Damit vereinfacht sich das Stoffgesetz

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (\text{Notation } \varepsilon_{xx} \text{ ist dasselbe wie } \varepsilon_x)$$

zu $\varepsilon_{xx} = \sigma_x/E$. Aus der gegebenen Dehnungskomponente $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$ (wobei mit ε eine gegebene Konstante gemeint ist) folgt somit die Spannungskomponente $\sigma_x = \varepsilon_{xx}E = \varepsilon E$. Aus der Formel

$$\sigma_x = \frac{M_b}{I_y} z, \quad I_y = \frac{R^4 \pi}{4}$$

folgt durch Auswertung bei Punkt A mit $z = R$ das Biegemoment

$$\underline{\underline{M_b = \frac{\varepsilon E R^3 \pi}{4}}}$$

Die Oberfläche des Stabträgers ist spannungsfrei, d. h. im Punkt A gilt:

$$\underline{s(e_z)} = \underline{0}$$

was einem ebenen Spannungszustand entspricht. Somit sind im Spannungstensor $\underline{\underline{T}}_{xyz}$ (siehe unten) die dritte Spalte=dritte Zeile= 0. Zudem ist $\sigma_y = 0$, weil (wie oben genannt) weder das Torsionsmoment noch das Biegemoment einen Beitrag dazu liefern. Somit muss der Spannungstensor wie folgt aussehen:

$$\underline{\underline{T}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

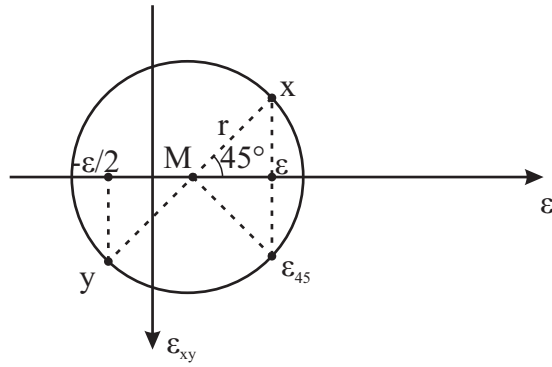
Stoffgesetz anwenden um ε_{yy} (und ε_{zz}) zu berechnen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\varepsilon}} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\varepsilon}} \end{aligned}$$

Nun kann der Mohrsche Dehnungskreis gezeichnet werden. Sowohl die x -Richtung wie auch die 45° -Richtung haben die Dehnung ε . Im Mohrschen Kreis liegen sie zueinander $2 \times 45^\circ = 90^\circ$ auseinander. Diese beiden Bedingungen können nur durch die unten gezeichnete Lage erfüllt werden, wo x im 45° -Winkel zur ε -Achse liegt.

Der Mittelpunkt M des Mohrschen Dehnungskreises liegt dann bei

$$M = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \frac{1}{4} \varepsilon$$



Mohrscher Dehnungskreis

Sein Radius r beträgt

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\varepsilon$$

Man kann auf der Ordinate ablesen, dass

$$\varepsilon_{xy} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\varepsilon}}$$

und aus der Formel $G = E / (2[1 + \nu])$ folgt mit gegebenem $\nu = 0.5$, dass

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{3}{4}\varepsilon = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{3}{2}\frac{\tau_{xy}}{E}$$

und somit

$$\tau_{xy} = -\frac{3}{4}\varepsilon\frac{2}{3}E = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\varepsilon E}}$$

Mit

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{I_p}z, \quad I_p = \frac{R^4\pi}{2}$$

folgt mit $z = R$ das Torsionsmoment

$$T = -\frac{\tau_{xy}I_p}{R} = \frac{1}{2}\varepsilon E \frac{R^3\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\varepsilon ER^3\pi}{4}}}$$

Nochmals zusammengeschrieben: Der gesuchte Spannungstensor im Punkt A ist

$$\underline{\underline{T}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon E & -\frac{1}{2}\varepsilon E & 0 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

...und der Dehnungstensor:

$$\underline{\underline{E}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -\frac{3}{4}\varepsilon & 0 \\ -\frac{3}{4}\varepsilon & -\frac{1}{2}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon \end{bmatrix}$$

Hier noch eine alternative Variante um ε_{xy} herauszufinden:
Aus

$$\underline{\underline{E}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & -\frac{1}{2}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon \end{bmatrix}$$

mit noch unbekanntem ε_{xy} folgt mit $\underline{n}_{45} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ dass

$$\begin{aligned} \varepsilon_{45} = \varepsilon &= \underline{n}_{45}^T \underline{\underline{E}} \underline{n}_{45} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon - \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2}\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy} - \frac{1}{2}\varepsilon \right) \\ \rightarrow \varepsilon_{xy} &= \underline{\underline{-\frac{3}{4}\varepsilon}} \end{aligned}$$