

Basisprüfung in Mechanik

D-MAVT, D-BAUG

1. schriftliche Prüfung

Prof. J. Dual, Prof. E. Mazza

14:30 - 15:15 Uhr

8. August 2012

Name	Vorname	ETH-Nummer	Studiengang
------	---------	------------	-------------

	A. 1	A. 2	A. 3	A. 4	A. 5	A. 6	A. 7		Punkte	Note
1. Korrektur										
Assistent										
2. Korrektur										
Assistent										

Hinweise

- Die Prüfung besteht aus 7 Aufgaben, die zusammen 22 Punkte ergeben.
- Erlaubte Hilfsmittel: keine (closed book)
- **Bitte keine roten oder grünen Farben verwenden, dies sind unsere Korrekturfarben.**
- Durchgestrichene oder unleserliche Lösungsteile werden nicht bewertet.
- Lösungsweg und Resultat nachvollziehbar darlegen.
- Bei Täuschungsversuchen gilt die Disziplinarordnung der ETH: Unter anderem kann die Prüfung für nicht bestanden erklärt werden.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3 Punkte)

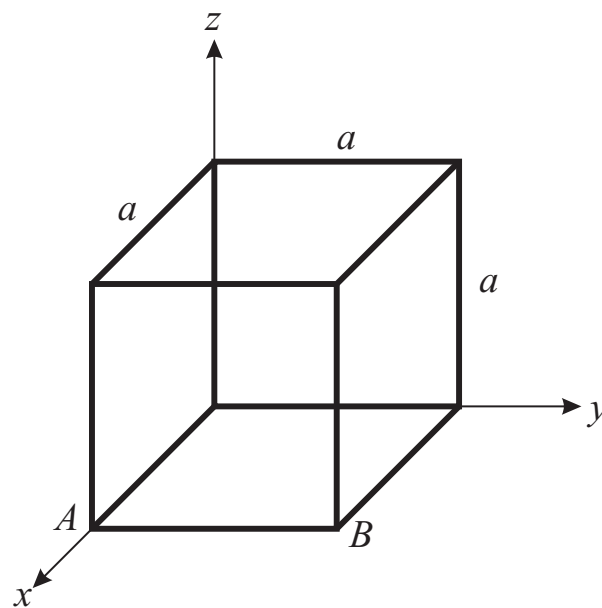
Vom dreidimensionalen Bewegungszustand eines Starrkörper-Würfels mit Kantenlänge a sei folgendes bekannt:

$$\underline{v}_A = (0, 4v, 2v)$$

$$\underline{v}_B = (-v, ?, 2v)$$

$$\underline{\omega} = (?, v/a, ?)$$

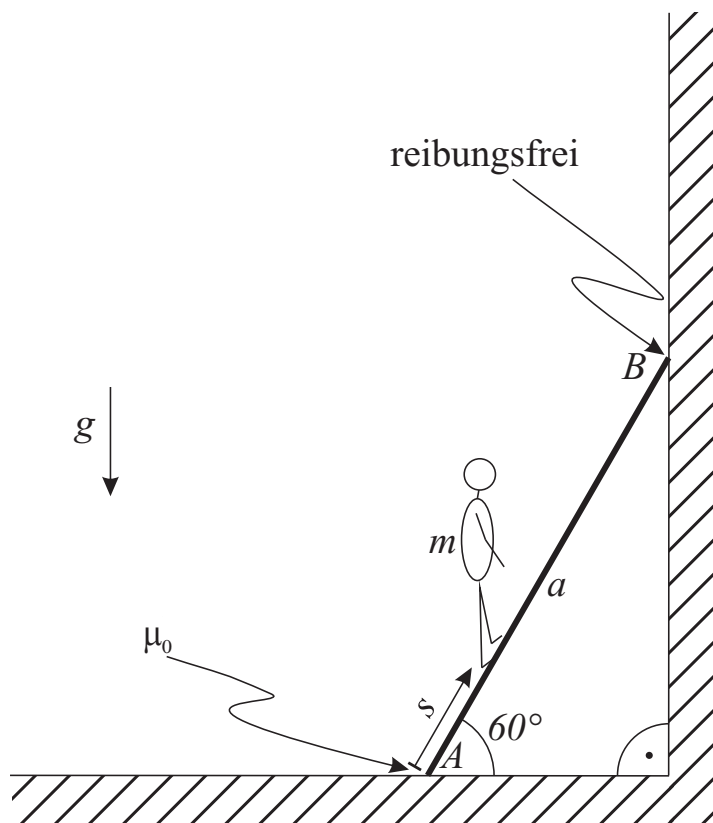
- a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$.
- b) (1 Punkt) Handelt es sich bei diesem Bewegungszustand um eine momentane Rotation? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 2 (3 Punkte)

Ein Student der Masse m steigt eine Leiter hoch, welche als gewichtsloser, starrer Stab der Länge a idealisiert ist. Der Stab ist in B reibungsfrei an eine Wand angelehnt. Der Kontakt in A ist reibungsbehaftet mit Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

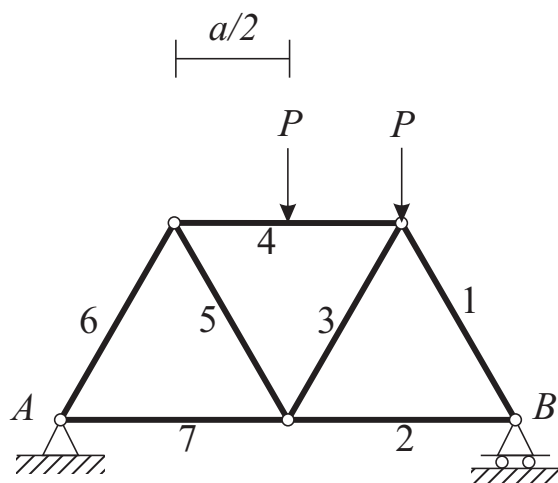
- (2 Punkte) Ab welcher Position s des hochsteigenden Studenten beginnt die Leiter zu rutschen?
- (1 Punkt) Man zeichne in der Abbildung unten geometrisch eindeutig die Richtung der Geschwindigkeit vom Fuss des Studenten ein für den Moment, wenn die Leiter abrutscht (wobei s konstant bleibt).



Aufgabe 3 (3 Punkte)

Das unten gezeichnete Fachwerk besteht aus 7 gewichtslosen, starren Stäben der Länge a . Die Stäbe sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden. In A befindet sich ein reibungsfreies gelenkiges Lager, in B ein reibungsfreies Auflager. Es greifen zwei Kräfte vom Betrag P am Fachwerk an.

- a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Stabkraft im Stab 1.
- b) (1 Punkt) Welcher Stab dieses Fachwerks weist die grösste Biegebeanspruchung auf?

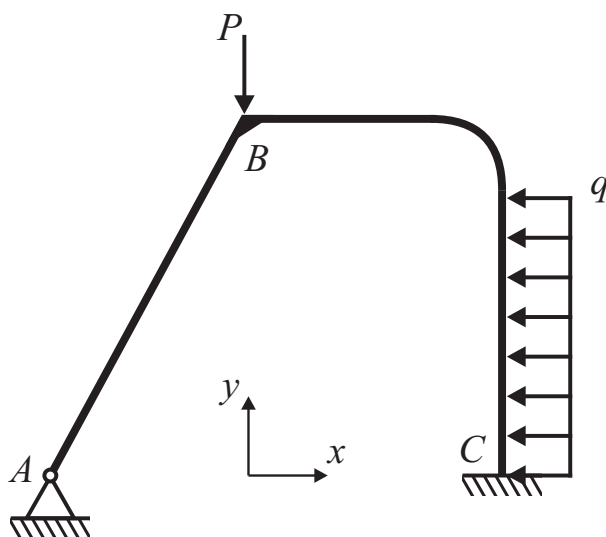


Aufgabe 4 (3 Punkte)

Ein zweidimensionales System besteht aus zwei gewichtslosen Balken AB und BC , die in B fest miteinander verschweisst sind. In A ist es reibungsfrei gelenkig gelagert, in C fest eingespannt.

Am Punkt B greift die Kraft P in negative y -Richtung an, zudem wirkt eine linienverteilte Last q wie eingezeichnet in negative x -Richtung.

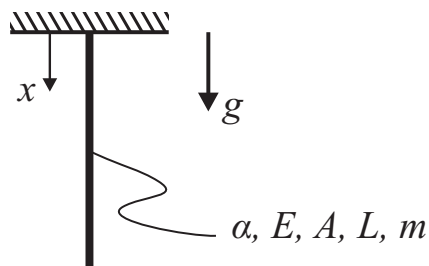
- a) (1 Punkt) Das System ist n -fach statisch unbestimmt. Bestimmen Sie den Grad n der statischen Unbestimmtheit. Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) (2 Punkte) Zeichnen Sie n statisch bestimmte Ersatzprobleme (inklusive Einführung von Einheitskräften bzw. -momenten), mit denen Sie die Lagerkräfte mit Hilfe der Arbeitsgleichungen lösen könnten (eine explizite Lösung ist nicht erforderlich).



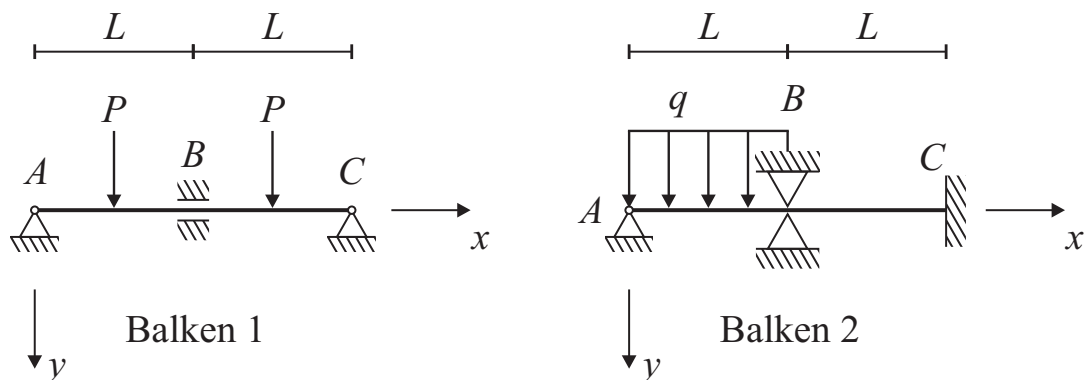
Aufgabe 5 (4 Punkte)

Ein Stab der Länge L sei am oberen Ende fest eingespannt und durch sein homogen verteiltes Eigengewicht belastet. Er hat Querschnittsfläche A , Elastizitätsmodul E , Masse m sowie Temperatúrausdehnungskoeffizient α .

Wie gross muss die Temperaturänderung ΔT sein, damit sich das untere Ende des Stabes nicht verschiebt ($u_x(x = L) = 0$)?

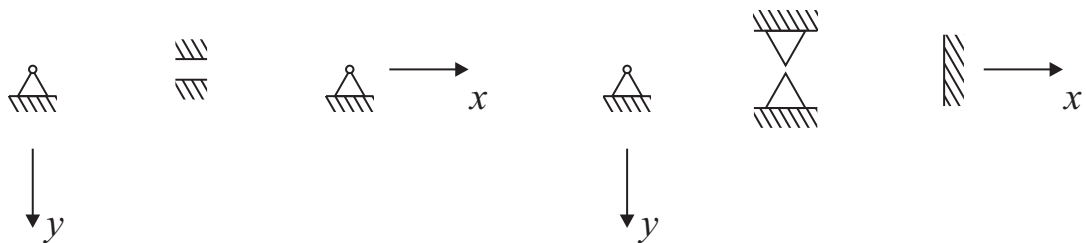


Aufgabe 6 (4 Punkte)



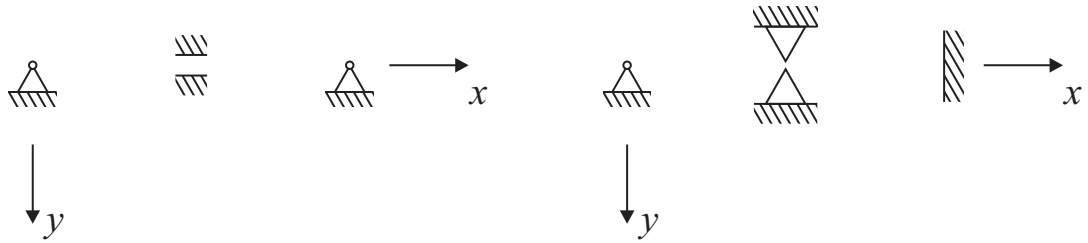
Zwei Balken der Länge $2L$ seien, wie in den beiden oberen Skizzen gezeigt, gelagert und belastet.

- (2 Punkte) Geben Sie für beide Balken die Rand- bzw. Übergangsbedingungen für die Verschiebungsfunktion $v(x)$ in y -Richtung an den Punkten A , B und C an.
- (2 Punkte) Zeichnen Sie qualitativ die Biegelinien für beide Fälle in die untere Skizze. (Eine Ersatzskizze befindet sich auf der nächsten Seite. Es wird nur eine Skizze bewertet, streichen Sie die nicht zu bewertende Skizze durch)



Ersatzskizze zu Aufgabe 6

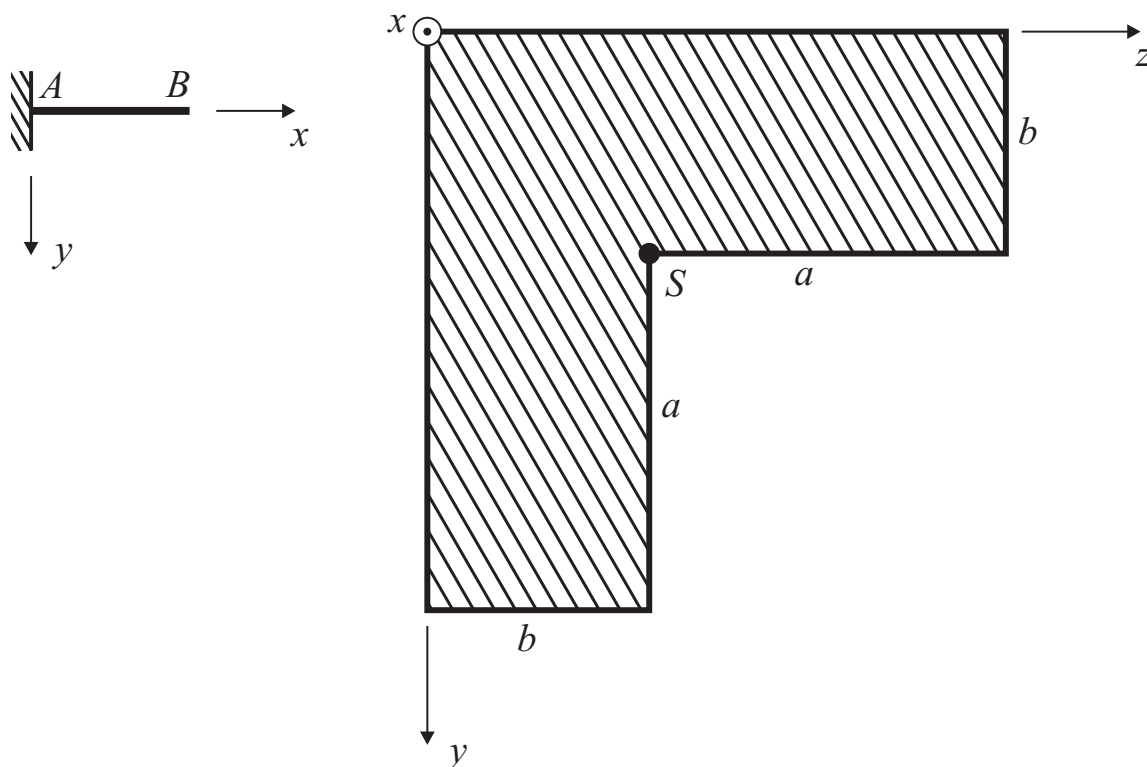
Es wird nur eine Skizze bewertet. Nicht zu bewertende Skizze durchstreichen.



Aufgabe 7 (2 Punkte)

Ein Balken sei wie links illustriert gelagert. Der Querschnitt besteht aus einem L-Profil mit den Längen a und b . Der Flächenmittelpunkt des Querschnittes ist in S .

- (1 Punkt) Tragen Sie die Hauptachsen \underline{e}_2 und \underline{e}_3 des Querschnittes in die Skizze ein.
- (1 Punkt) Wie muss eine Kraft Q , die im Punkt B am Flächenmittelpunkt S angreift, in der yz -Ebene orientiert sein, damit spezielle Biegung vorliegt? Zeichnen Sie eine Lösung in die Querschnittsskizze.



Basisprüfung in Mechanik

D-MAVT, D-BAUG

2. schriftliche Prüfung

Prof. J. Dual, Prof. E. Mazza

15:30 - 17:15 Uhr

8. August 2012

Name	Vorname	ETH-Nummer	Studiengang
------	---------	------------	-------------

	A. 1	A. 2	A. 3						Punkte	Note
1. Korrektur										
Assistent										
2. Korrektur										
Assistent										

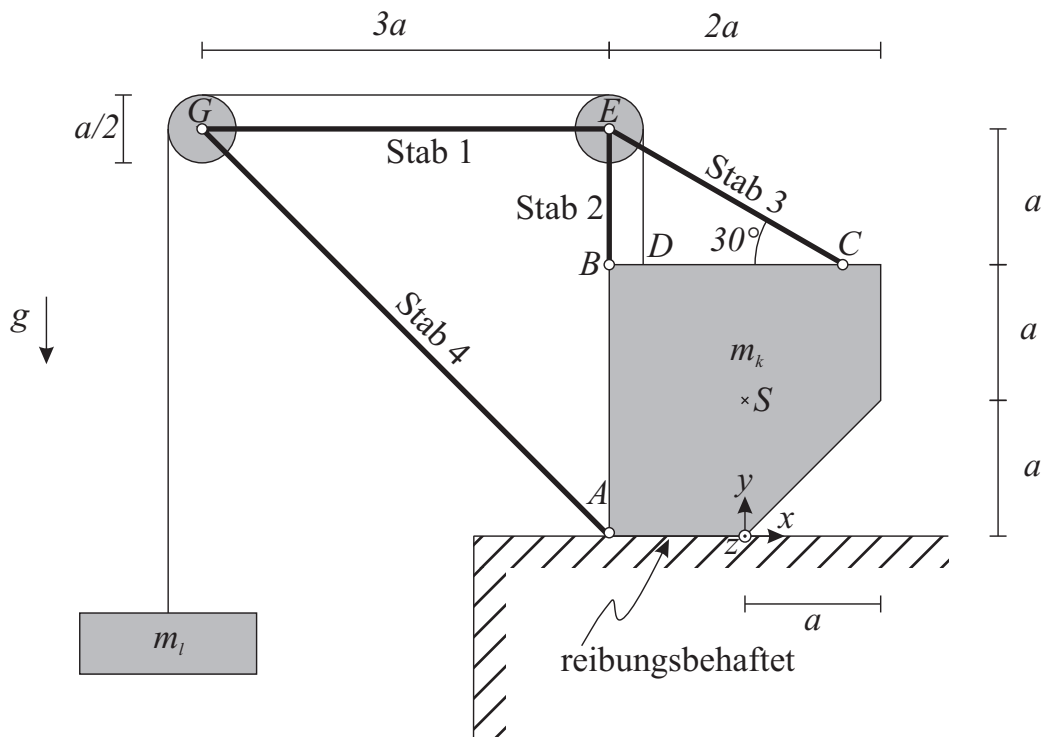
Hinweise

- Die Prüfung besteht aus 3 Aufgaben, die zusammen 43 Punkte ergeben.
- Erlaubte Hilfsmittel: Eine selbstverfasste Formelsammlung von 3 Blättern vom Format A4. Kein Taschenrechner.
- **Bitte keine roten oder grünen Farben verwenden, dies sind unsere Korrekturfarben.**
- **Für jede Aufgabe ein separates Blatt des ausgeteilten ZfM-Institutspapieres verwenden und dieses mit Namen, ETH- und Aufgabennummer beschriften.**
- **Lösungsteile auf den Aufgabenblättern werden nicht bewertet.**
- Durchgestrichene oder unleserliche Lösungsteile werden nicht bewertet.
- Lösungsweg und Resultat nachvollziehbar darlegen.
- Bei Täuschungsversuchen gilt die Disziplinarordnung der ETH: Unter anderem kann die Prüfung für nicht bestanden erklärt werden.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Ein zweidimensionales Kranmodell besteht aus einer starren Kabine, 4 gewichtslosen, starren Stäben und einem über 2 gewichtslose Rollen gespannten gewichtslosen Seil, an dem eine Last der Masse m_l hängt. Die Kabine hat eine Masse m_k , liegt reibungsbehaftet auf dem Boden auf, und ihr Schwerpunkt S sei (aufgrund inhomogener Massenverteilung) bei $(0, a, 0)$. Alle Stäbe sind an beiden Enden reibungsfrei gelenkig gelagert. Bei den Punkten A , B und C sind die Stäbe reibungsfrei gelenkig mit der Kabine verbunden. Die Rollen mit Radius $a/4$ sind reibungsfrei gelagert. Das Seil haftet auf beiden Rollen und ist bei D an der Kabine fest eingespannt.

- (2 Punkte) Schneiden Sie die beiden Rollen und die Kabine frei.
- (5 Punkte) Berechnen Sie die Stabkräfte im Stab 2 und 3 durch Kräfte- und Momentengleichgewichte.
- (2 Punkte) Wie schwer darf die Last m_l maximal sein, sodass der Kran nicht kippt?
- (3 Punkte) Berechnen Sie die Stabkraft im Stab 3 nochmals, dieses Mal mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL).
- (3 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten des Flächenmittelpunktes des Fünfecks, welches die Kabine darstellt (bezüglich des gegebenen Koordinatensystems).

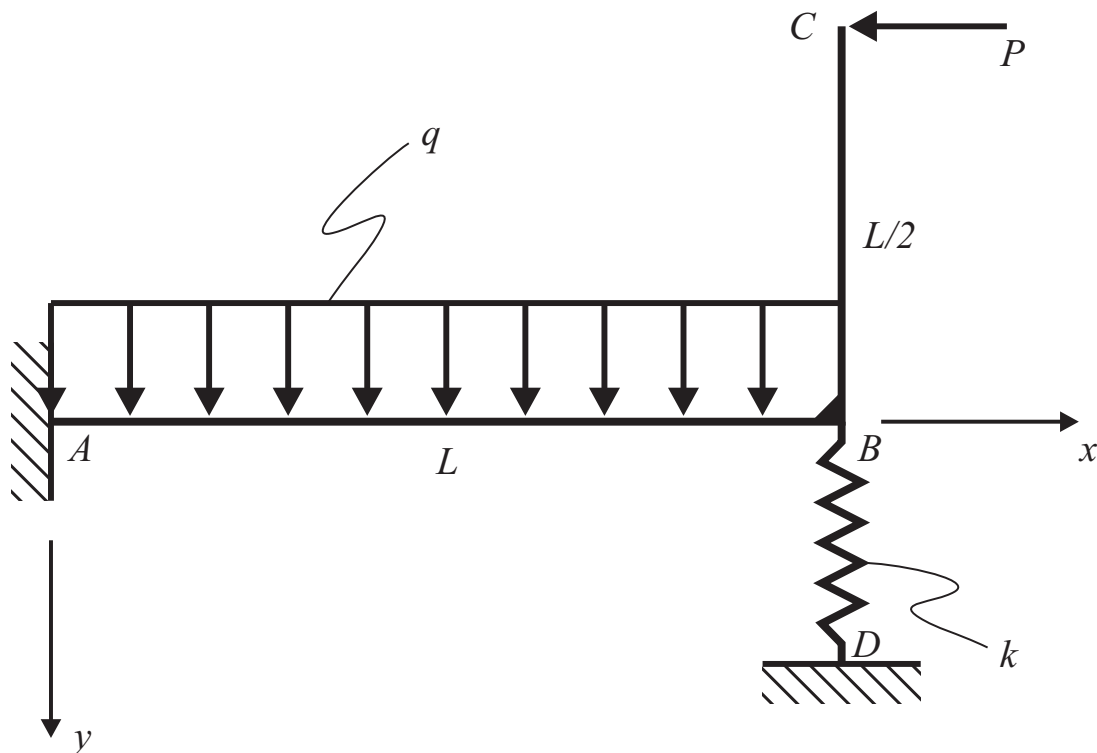


Aufgabe 2 (14 Punkte)

Folgendes zweidimensionales Problem besteht aus zwei gewichtslosen Stabträgern AB (Länge L) und BC (Länge $L/2$). Diese sind in B rechtwinklig fest miteinander verschweisst. In A ist das System fest eingespannt. Eine gewichtslose Feder stützt das System im Punkt B in y -Richtung ab. Der Stabträger AB ist durch eine linienverteilte Last q in positive y -Richtung belastet. Am Punkt C greift die Kraft P in negative x -Richtung an.

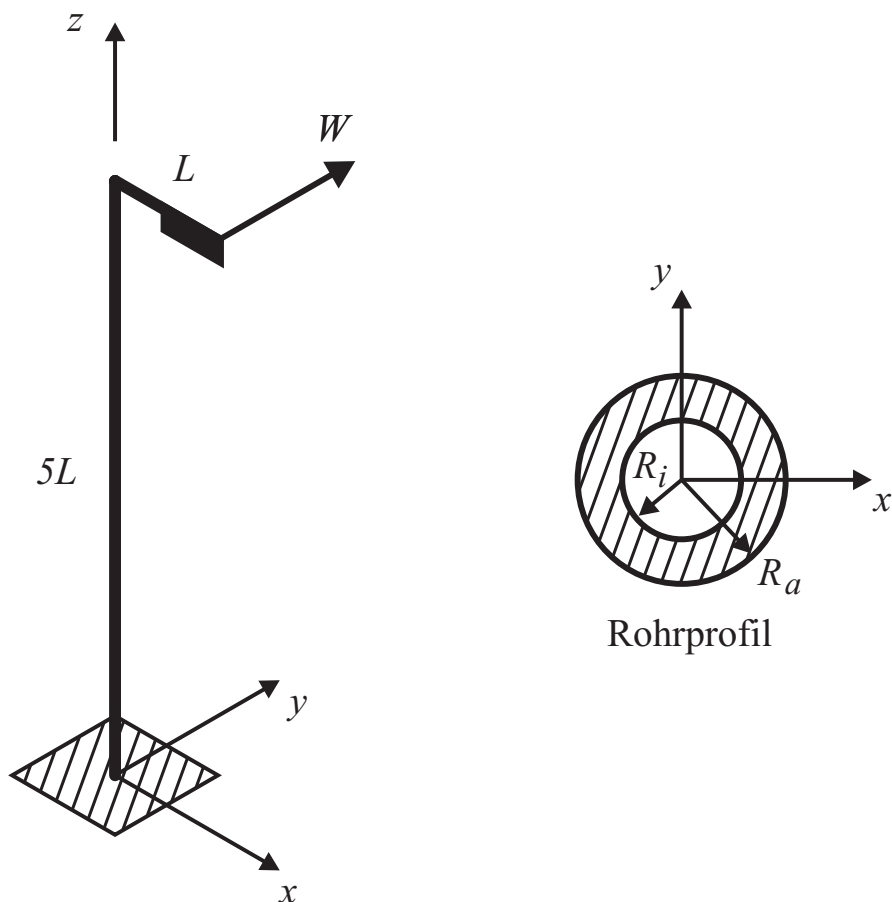
Beide Stabträger haben Querschnittsfläche A , Elastizitätsmodul E , sowie Flächenträgheitsmoment I_z . Die Feder hat die Federkonstante $k = EI_z/L^3$.

- (1 Punkt) Ist das System statisch bestimmt oder unbestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (6 Punkte) Bestimmen Sie die Beanspruchung in den Stabträgern AB sowie BC in Abhängigkeit von P , q und der Federkraft.
- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Deformationsenergie des Gesamtsystems (die Integrale müssen nicht ausgerechnet werden). Der Einfluss der Querkraft (Schubspannungen infolge Biegung) sei vernachlässigbar.
- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Federkraft mit Hilfe des Satzes von Castigliano.
- (1 Punkt) Bestimmen Sie die Verschiebung des Punktes B in y -Richtung.



Aufgabe 3 (14 Punkte)

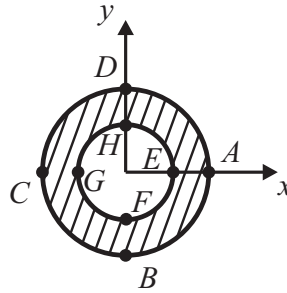
Eine Strassenlaterne sei durch die unten dargestellte Modellierung idealisiert. Die gesamte Konstruktion besteht aus gewichtslosen Komponenten. Die Laterne hat eine Gesamthöhe von $5L$. Der horizontale Arm ist parallel zur x -Achse und hat die Länge L . An dessen Ende greift die Windkraft W in positive y -Richtung an. Das Material der Laterne hat Elastizitätsmodul E , Schubmodul G und Poisson-Zahl $\nu = 1/3$. Die Laterne ist aus einem dickwandigen Rohrprofil mit konstantem R_i und R_a wie dargestellt gefertigt.



Aufgaben siehe folgende Seite!

Teil 1:

- a) (2 Punkte) Geben Sie für den gegebenen Querschnitt sowohl das Flächenträgheitsmoment I_x als auch das polare Flächenträgheitsmoment I_p bezüglich des Flächmittelpunktes an.
- b) (1 Punkte) Die Beanspruchung ist in der Einspannung ($z = 0$) maximal. Geben Sie für diesen Querschnitt denjenigen Punkt A , B , C , D , E , F , G oder H an, in dem die maximale Druckspannung auftritt.



- c) (5 Punkte) Berechnen Sie nun für den Punkt B alle Komponenten des Spannungstensors im xyz -Koordinatensystem.

Teil 2:

Der Hersteller verwendet für sein Produkt einen duktilen Werkstoff. Die kritische Schubspannung für dieses Material sei mit τ_{krit} gegeben.

- d) (4 Punkte) Berechnen Sie die Hauptspannungen für den in Aufgabenteil c) bestimmten Spannungstensor.
- e) (2 Punkte) Geben Sie ein oberes Limit für die Windkraft W an, bei dem die Laterne im Punkt B versagt.

Musterlösung Basisprüfung vom 8. August 2012,

1. schriftliche Prüfung

Aufgabe 1

a)

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ ? \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ v/a \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + \omega_z a \\ ? \\ 2v - \omega_x a \end{pmatrix}$$

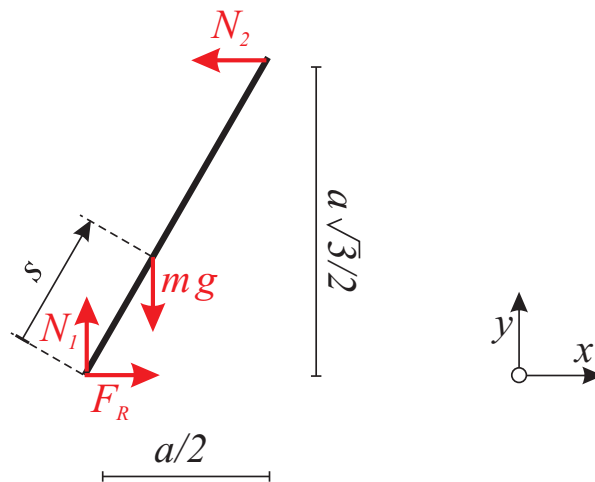
$$\rightarrow \boxed{\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/a \\ v/a \end{pmatrix}}$$

b) Nein, keine momentane Rotation

Begründung: $\underline{\omega} \cdot \underline{v}_A \neq 0$ oder $\underline{\omega} \cdot \underline{v}_B \neq 0$ oder 2. Invariante ungleich null

Aufgabe 2

a) Momentengleichgewicht in A:



$$N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} a = mg \frac{s}{2}$$

$$\rightarrow N_2 = mg \frac{s}{a\sqrt{3}} = F_R$$

Kräftegleichgewicht in y -Richtung: $N_1 = mg$

Haftreibungsgesetz:

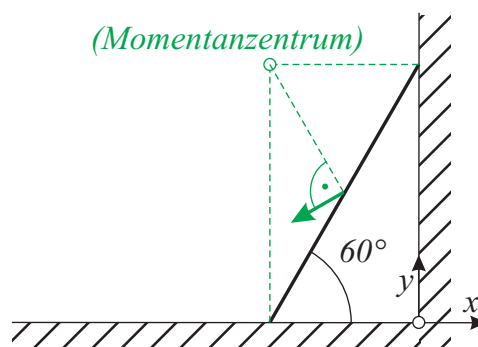
$$F_R \leq \mu_0 N_1$$

$$\rightarrow mg \frac{s}{a\sqrt{3}} \leq \mu_0 mg$$

$$\rightarrow s \leq \mu_0 a \sqrt{3}$$

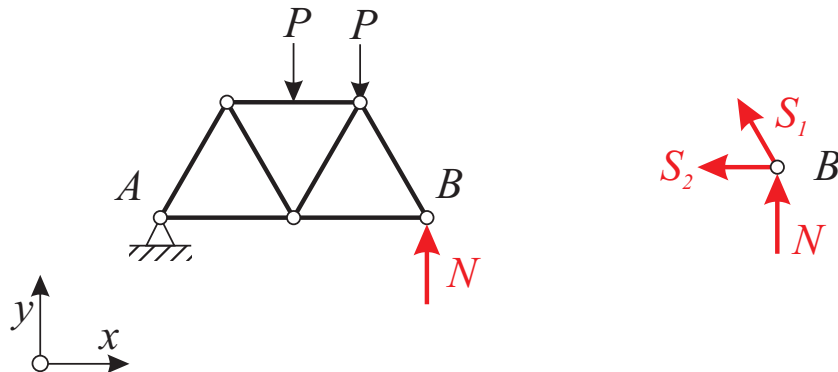
\rightarrow Rutschen ab $\boxed{s > \frac{a}{2}}$

b)



Aufgabe 3

a) Lösungsweg 1:



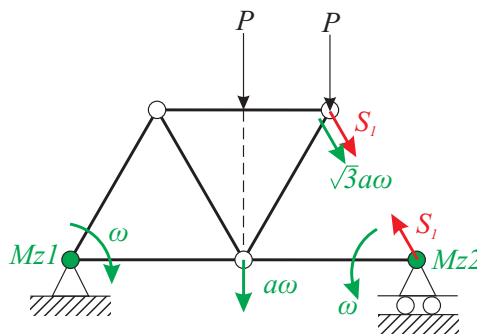
Momentenbedingung um A:

$$2a \cdot N = \left(a + \frac{3}{2}a\right) P \rightarrow N = \frac{5}{4}P$$

Knotengleichgewicht bei B in y -Richtung:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} S_1 + N = 0 \rightarrow S_1 = \frac{-5P}{2\sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{3}P}{6}$$

Lösungsweg 2:



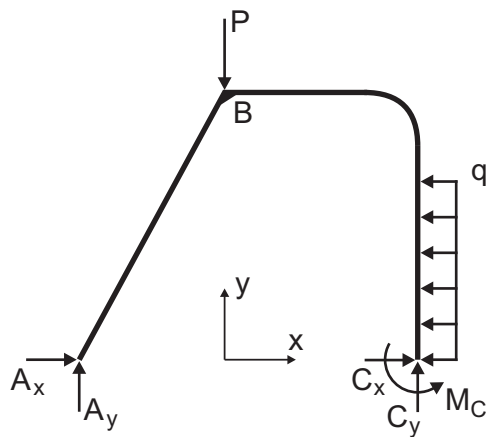
PdVL:

$$0 = S_1 \cdot \sqrt{3}a\omega + P \cdot a\omega + P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}a\omega = 0 \rightarrow S_1 = \frac{-5P}{2\sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{3}P}{6}$$

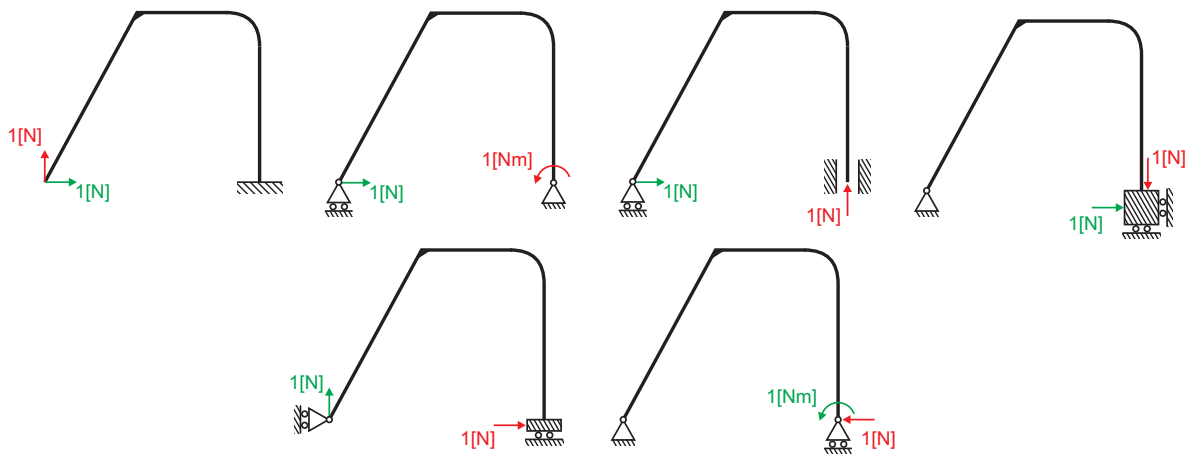
b) Stab 4 (der einzige Stab, der ein Biegemoment $\neq 0$ hat und keine Pendelstütze ist)

Aufgabe 4

a) $n = 2$, 5 Unbekannte, 3 Gleichungen (2D-System)



b) SbEP aus der folgenden Liste (zwei Bindungen gelöst und entsprechende Einheitskräfte/-momente eingeführt). Für jeden Fall aus der unteren Liste müssen 2 einzelne SbEP gezeichnet werden, eines für die rote Grösse und eines für die grüne Grösse:



Aufgabe 5

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$x = L \quad \Rightarrow \quad N = 0$$

$$N(x) = mg \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$u_{x,x} = \frac{N}{AE} + \alpha \Delta T = \frac{mg}{AE} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \alpha \Delta T$$

\Rightarrow

$$u_x = \frac{mg}{AE} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) + \alpha \Delta T x + C_1$$

$$\text{mit } u_x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} u_x(x=L) &= \frac{mg}{AE} \left(L - \frac{L}{2}\right) + \alpha \Delta T L \stackrel{!}{=} 0 \\ &= \frac{mg}{2AE} + \alpha \Delta T \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta T = -\frac{mg}{2AE\alpha}}$$

Aufgabe 6

a) *I*: linke Hälfte, $0 \leq x \leq L$, *II*: rechte Hälfte, $L \leq x \leq 2L$

Balken 1:

$$\begin{aligned} v_I(x=0) &= 0 \\ v_I(x=L) &= v_{II}(x=L) = 0 \\ v'_I(x=L) &= v'_{II}(x=L) = 0 \\ v_{II}(x=2L) &= 0 \end{aligned}$$

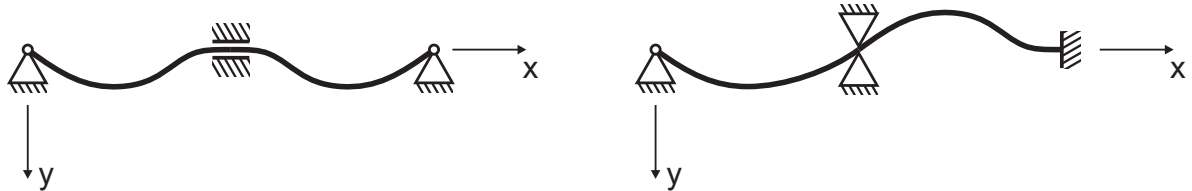
Balken 2:

$$\begin{aligned} v_I(x=0) &= 0 \\ v_I(x=L) &= v_{II}(x=L) = 0 \\ v'_I(x=L) &= v'_{II}(x=L) \\ v_{II}(x=2L) &= 0 \\ v'_{II}(x=2L) &= 0 \end{aligned}$$

b)

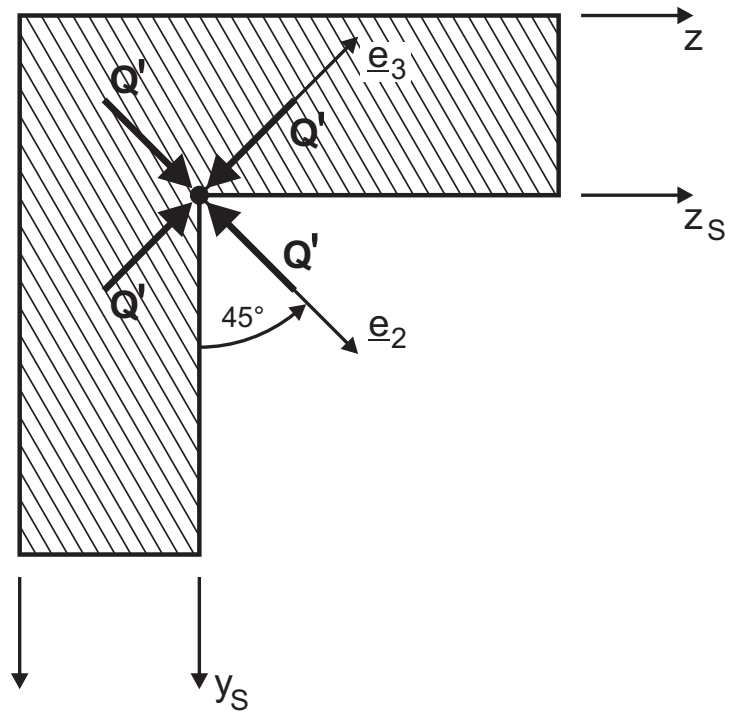
Balken 1: Achten auf Symmetrie, waagerechten Übergang bei *B*

Balken 2: Achten auf waagerechten Übergang bei *C*



Aufgabe 7

a), b) Q entlang einer Hauptachse (Symmetrieachse):

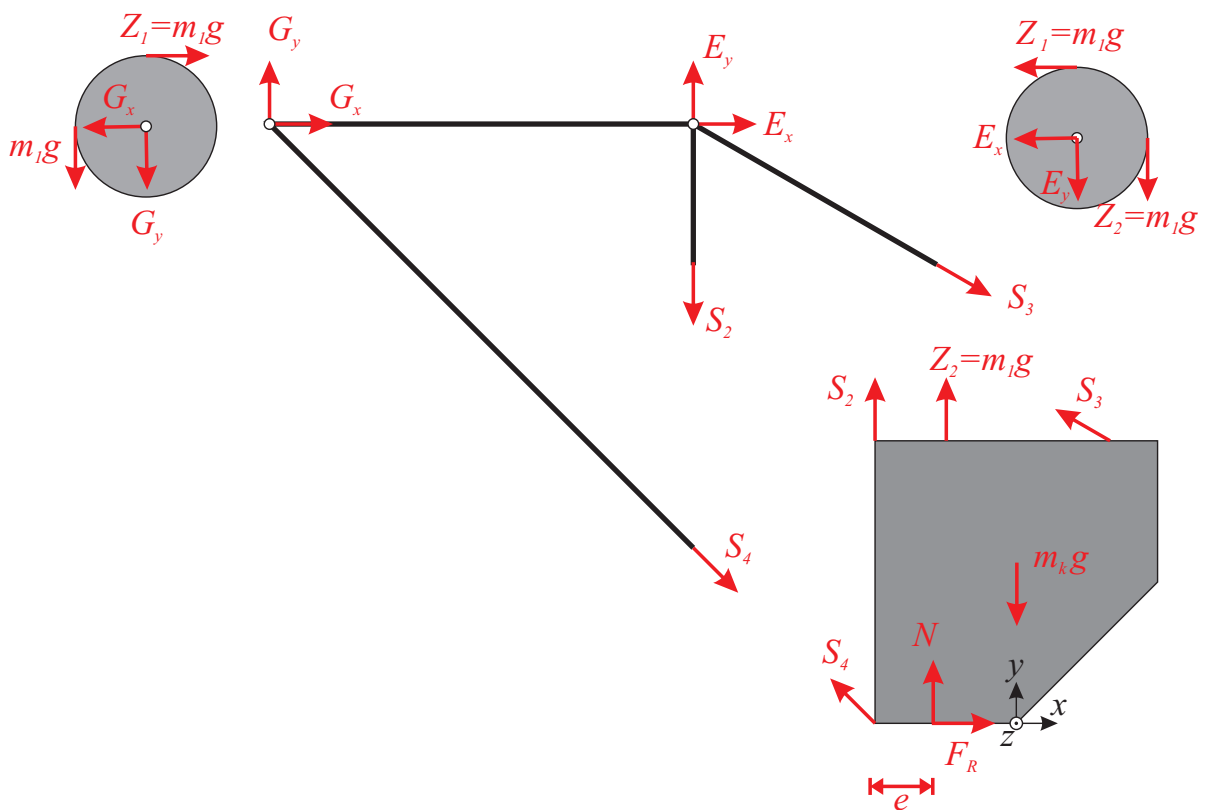


Musterlösung Basisprüfung vom 8. August 2012,

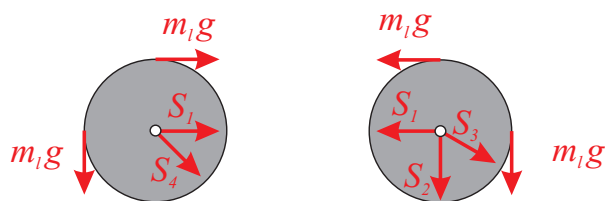
2. schriftliche Prüfung

Aufgabe 1

a)



Freischnittsskizze



Alternativer Freischnitt für Rollen (direkter)

b) GGW an linker Rolle:

aus der Momentenbedingung in G folgt $Z_1 = m_l g$, somit:

in x-Richtung: $G_x = m_l g$

in y-Richtung: $G_y = -m_l g$

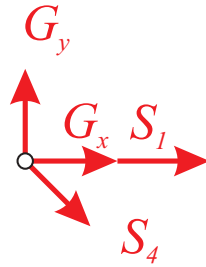
GGW an rechter Rolle:

aus der Momentenbedingung in E folgt $Z_2 = Z_1 = m_l g$, somit:

in x-Richtung: $E_x = -m_l g$

in y-Richtung: $E_y = -m_l g$

Knotengleichgewicht bei G:



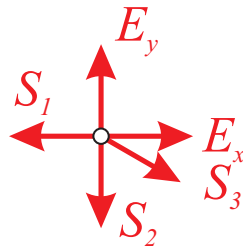
Knoten bei G

in y-Richtung: $G_y = \frac{S_4}{\sqrt{2}} \rightarrow S_4 = -\sqrt{2}m_l g$

in x-Richtung: $G_x + S_1 + \frac{S_4}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow S_1 = 0$

Knotengleichgewicht bei E:

in x-Richtung: $E_x + S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = S_1 \rightarrow S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}m_l g$



Knoten bei E

in y-Richtung: $E_y = S_2 + \frac{S_3}{2}$

$$\rightarrow S_2 = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)m_l g = -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)m_l g = -\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)m_l g$$

Wird bei a) die direktere Alternative gewählt, führen direkt GGW an der linken und rechten Rolle zum selben Ergebnis:

GGW an linker Rolle direkt:

in y-Richtung: $0 = \frac{S_4}{\sqrt{2}} + m_l g$

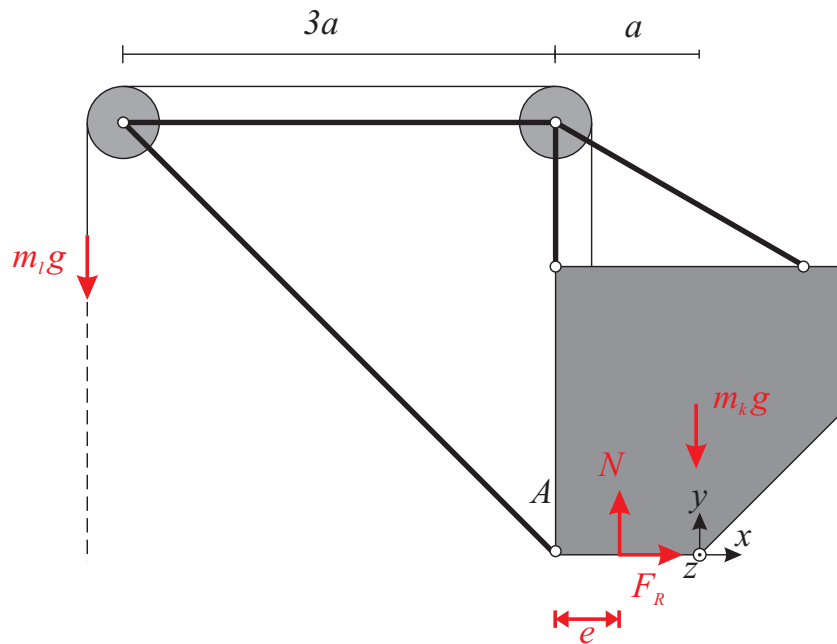
in x-Richtung: $\frac{S_4}{\sqrt{2}} + S_1 + m_l g = 0$

GGW an rechter Rolle direkt:

in x-Richtung: $S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = S_1 + m_l g$

in y-Richtung: $0 = \frac{S_3}{2} + S_2 + m_l g$

c) Der Kran wird hier am besten als ganzes System freigeschnitten wie illustriert. Der



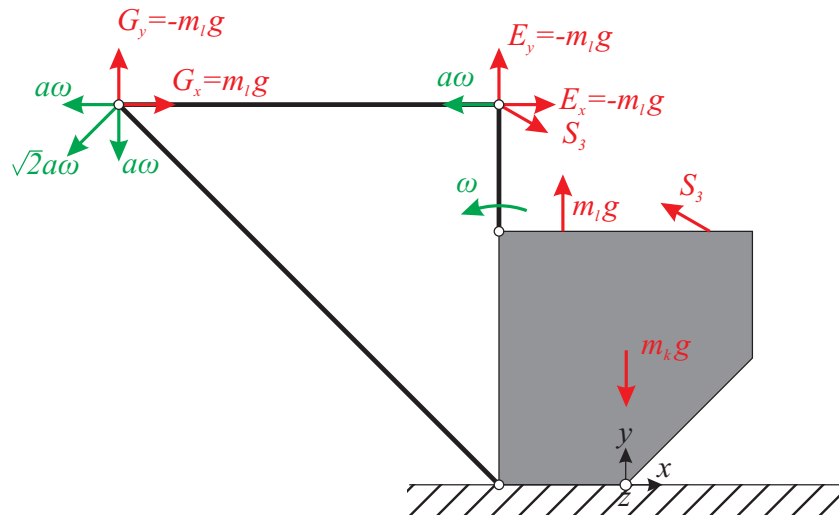
Kippskizze

Kran beginnt genau dann zu kippen, wenn $e = 0$ ist. Damit ergibt sich folgende Momentenbedingung um Punkt A in z -Richtung (Kräfte entlang ihrer Wirkungsline zu verschieben ist erlaubt):

$$\left(3a + \frac{a}{4}\right) m_l g = a m_k g \quad \rightarrow \quad m_{l \text{ maximal}} = \frac{4}{13} m_k$$

Alternativ kann an der freigeschnittenen Kabine das Momentengleichgewicht um z. B. Punkt A aufgestellt werden mit $e = 0$.

d) Die Skizze zeigt einen möglichen Bewegungszustand für das PdvL. Die Rollen sind freigeschnitten und deren Lagerkräfte als äussere Kräfte am Fachwerk aufzufassen. Dann ergibt sich:



PdVL-Skizze

$$0 = a\omega \left(-S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} - E_x \right) - a\omega G_x - a\omega G_y$$

$$0 = a\omega \left(-S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} + m_l g \right) - a\omega m_l g + a\omega m_l g$$

$$\rightarrow \boxed{S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} m_l g}$$

Alternativ könnte man das PdVL an einem System mitsamt der Rollen und Seile formulieren, dann jedoch wird die Überlegung der Leistung der äusseren Kraft am Seil bei der linken Rolle anspruchsvoll. Die linke und rechte Rolle beschreiben eine reine Translation mit der Geschwindigkeit ihrer Mittelpunkte G und E . Es ergibt sich dann direkt

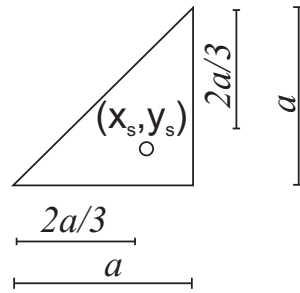
$$0 = a\omega \left(-S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + a\omega m_l g$$

was zur selben Lösung führt.

e) Der Flächenmittelpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks liegt bei $\frac{2}{3}$ der Kathete:

Begründung nicht erforderlich, wäre jedoch so:

$$x_s = \frac{\int_0^a x \cdot x \, dx}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2}{3}a$$



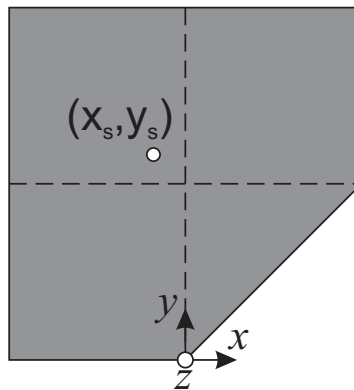
Flächenmittelpunkt Dreieck

volles Quadrat minus Dreieck rechts unten:

$$x_s = \frac{4a^2 \cdot 0 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3}}{4a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{-\frac{a^3}{3}}{\frac{7a^2}{2}} = \boxed{\frac{-2}{21}a}$$

Nun folgt y_s direkt aus der Symmetrie oder mit analoger Rechnung:

$$y_s = a + \frac{2}{21}a = \boxed{\frac{23}{21}a} = \frac{4a^2 \cdot a - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3}}{4a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{23a^3}{6}}{\frac{7a^2}{2}}$$



Flächenmittelpunkt Kabine

Alternativ kann man das Fünfeck aufteilen in 3 Vierecke und 1 Dreieck wie oben gezeichnet und analog vorgehen:

$$x_s = \frac{2a^2 \cdot \frac{-a}{2} + a^2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3}}{4a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{-\frac{a^3}{3}}{\frac{7a^2}{2}} = \frac{-2}{21}a$$

$$y_s = \frac{2a^2 \cdot \frac{3a}{2} + a^2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3}}{4a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{23a^3}{6}}{\frac{7a^2}{2}} = \frac{23}{21}a$$

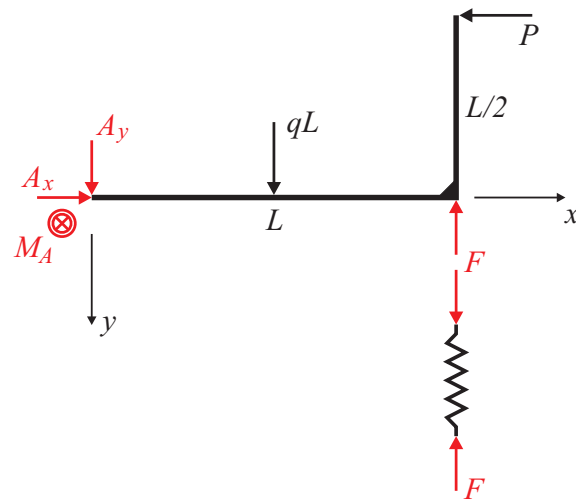
Aufgabe 2

a)

Statisch unbestimmt, da 4/7 Lagerreaktionen, 3/6 Gleichungen (2D/3D)

b)

1) Lagerkräfte



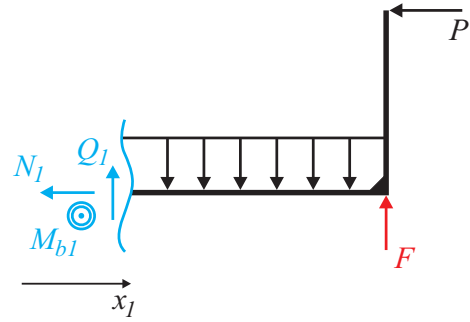
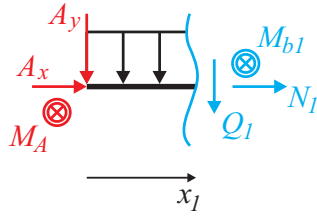
$$A_x = P$$

$$A_y = F - qL$$

$$M_A = -qL^2/2 + FL + PL/2$$

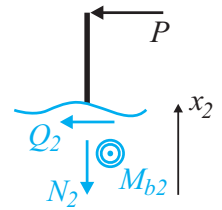
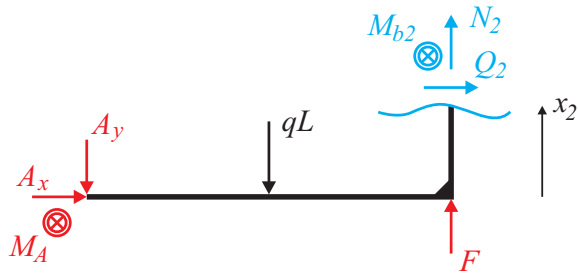
2) Freischnitte

$$0 \leq x_1 \leq L:$$



$$\begin{aligned} N_1 &= -P \\ Q_1 &= q(L - x_1) - F \\ M_{b1} &= \frac{q}{2}(L - x_1)^2 - F(L - x_1) - \frac{PL}{2} \end{aligned}$$

$$0 \leq x_2 \leq L/2:$$



$$\begin{aligned} N_2 &= 0 \\ Q_2 &= -P \\ M_{b2} &= -P \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) \end{aligned}$$

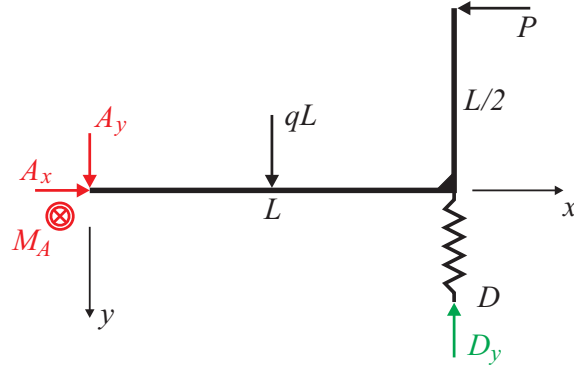
c)

$$\begin{aligned}
U &= \int_0^L \frac{M_{b1}^2}{2EI} dx_1 + \int_0^{L/2} \frac{M_{b2}^2}{2EI} dx_2 \\
&\quad + \int_0^L \frac{N_1^2}{2AE} dx_1 \\
&\quad + \frac{F^2}{2k} \\
&= \int_0^L \frac{\left[\frac{q}{2}(L-x_1)^2 - F(L-x_1) - \frac{PL}{2}\right]^2}{2EI} dx_1 \\
&\quad + \int_0^{L/2} \frac{\left[-P\left(\frac{L}{2} - x_2\right)\right]^2}{2EI} dx_2 \\
&\quad + \int_0^L \frac{(-P)^2}{2AE} dx_1 \\
&\quad + \frac{F^2 L^3}{2EI}
\end{aligned}$$

d)

Variante 1: Kraft D_y im Lager der Feder

Die Bindung der Feder wird gelöst und die Kraft D_y anstelle der Bindung eingeführt.
Die Verschiebung an der Stelle der Bindung wird 0 gesetzt.



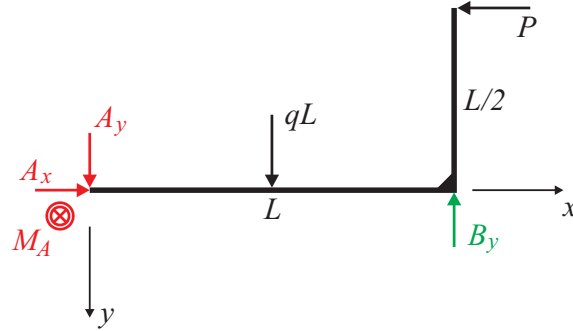
Satz von Castigliano:

$$\begin{aligned}
 v_D &= \frac{\partial U}{\partial D_y} \stackrel{!}{=} 0 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{b1} \frac{\partial M_{b1}}{\partial D_y} dx_1 + \frac{\partial}{\partial D_y} \frac{D_y^2 L^3}{2EI} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \int_0^L - \left[\frac{q}{2} (L - x_1)^2 - D_y (L - x_1) - \frac{PL}{2} \right] (L - x_1) dx_1 + D_y L^3 \\
 &= \left[\frac{q}{2} \frac{1}{4} (L - x_1)^4 - D_y \frac{1}{3} (L - x_1)^3 - P \frac{L}{2} \frac{1}{2} (L - x_1)^2 \right]_0^L + D_y L^3 \\
 &= \frac{qL^4}{8} - \frac{qL - D_y}{3} L^3 - \frac{PL^3}{4} - \frac{PL^2}{4} - (qL - D_y)L^3 \\
 &= -\frac{1}{8}qL^4 + \frac{4}{3}D_yL^3 + \frac{1}{4}PL^3
 \end{aligned}$$

$$\boxed{F = \frac{3}{32}qL - \frac{3}{16}P}$$

Variante 2: Kraft B_y in B

Die Feder wird entfernt und durch eine Kraft B_y an der Stelle B ersetzt (damit fällt auch die Deformationsenergie der Feder aus der Energie des Gesamtsystems raus). Die Deformationsenergie des Gesamtsystems wird dann nach dieser Kraft abgeleitet und die daraus resultierende Verschiebung an der Stelle B gleich $-B_y/k$ gesetzt (Verschiebung bekannt bzw. mit Federkraft gekoppelt). Negatives Vorzeichen, da Verschiebung in entgegengesetzte Richtung der Kraft:



Satz von Castigliano:

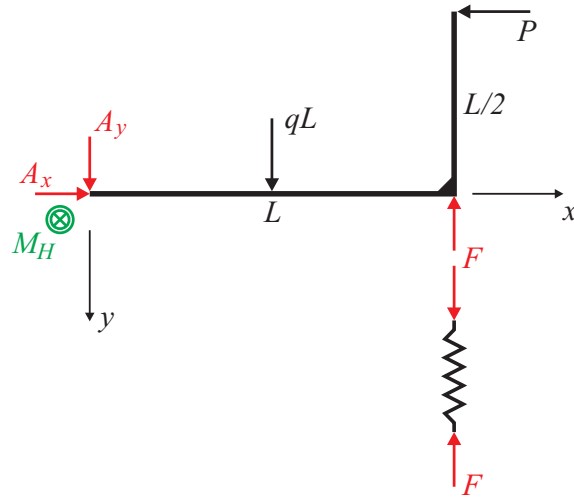
$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\partial U}{\partial B_y} \stackrel{!}{=} -\frac{B_y}{k} \neq 0 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{b1} \frac{\partial M_{b1}}{\partial B_y} dx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &= \int_0^L - \left[\frac{q}{2} (L - x_1)^2 - B_y (L - x_1) - \frac{PL}{2} \right] (L - x_1) dx_1 + B_y L^3 \\ &= \left[\frac{q}{2} \frac{1}{4} (L - x_1)^4 - B_y \frac{1}{3} (L - x_1)^3 - P \frac{L}{2} \frac{1}{2} (L - x_1)^2 \right]_0^L + B_y L^3 \\ &= \frac{qL^4}{8} - \frac{qL - B_y}{3} L^3 - \frac{PL^3}{4} - \frac{PL^2}{4} - (qL - B_y) L^3 \\ &= -\frac{1}{8} qL^4 + \frac{4}{3} B_y L^3 + \frac{1}{4} PL^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{F = \frac{3}{32} qL - \frac{3}{16} P}$$

Variante 3: Moment M_H

Darstellen aller Beanspruchungskomponenten und Federkraft als Funktion des Momentes M_H ($F = f(M_H)$, $M_{b1} = f(M_H)$, der Rest ist unabhängig):



$$F = \frac{M_H}{L} + q\frac{L}{2} - \frac{P}{2}$$

$$M_{b1} = \frac{q}{2}(L - x_1)^2 - \left(\frac{M_H}{L} + q\frac{L}{2} - \frac{P}{2}\right)(L - x_1) - P\frac{L}{2}$$

Satz von Castigliano:

$$v'_A = \frac{\partial U}{\partial M_H} \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{b1} \frac{\partial M_{b1}}{\partial M_H} dx_1 + \frac{L^3}{EI} F \frac{\partial F}{\partial M_H}$$

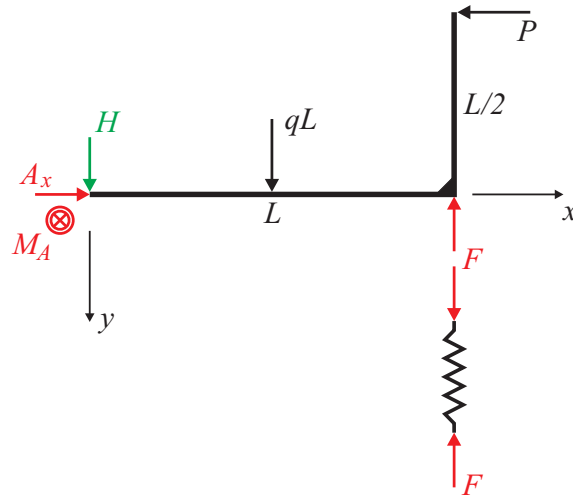
$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 &= \int_0^L -\frac{1}{L} \left[\frac{q}{2}(L-x_1)^3 + -\left(\frac{M_H}{L} + q\frac{L}{2} - \frac{P}{2}\right)(L-x_1)^2 - P\frac{L}{2}(L-x_1) \right] dx_1 \\
&\quad + L^2 \left(\frac{M_H}{L} + q\frac{L}{2} - \frac{P}{2} \right) \\
&= \frac{1}{L} \left[\frac{q}{2} \frac{1}{4} (L-x_1)^4 - \left(\frac{M_H}{L} + q\frac{L}{2} - \frac{P}{2} \right) \frac{1}{3} (L-x_1)^3 - P\frac{L}{2} \frac{1}{2} (L-x_1)^2 \right]_0^L \\
&\quad + M_H L + q\frac{L^3}{2} - P\frac{L^2}{2} \\
&= -\frac{qL^3}{8} + \frac{M_H L}{3} + \frac{qL^3}{6} - \frac{PL^2}{6} + \frac{PL^2}{4} + M_H L + q\frac{L^3}{2} - P\frac{L^2}{2} \\
&= \frac{4}{3}M_H L + \frac{13}{24}qL^3 - \frac{5}{12}PL^2 \\
\Rightarrow M_H &= -\frac{13}{32}qL^2 + \frac{5}{16}PL
\end{aligned}$$

Einsetzen in F :

$$F = \frac{3}{32}qL - \frac{3}{16}P$$

Variante 4: Kraft H in A

Darstellen aller Beanspruchungskomponenten und Federkraft als Funktion der Kraft H ($F = f(H)$, $M_{b1} = f(H)$, der Rest ist unabhängig):



$$\begin{aligned}
F &= qL + H \\
M_{b1} &= \frac{q}{2}(L-x_1)^2 - (qL + H)(L-x_1) - P\frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Satz von Castigliano:

$$\begin{aligned}
 v_A &= \frac{\partial U}{\partial H} \stackrel{!}{=} 0 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{b1} \frac{\partial M_{b1}}{\partial H} dx_1 + \frac{L^3}{EI} F \frac{\partial F}{\partial H} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \int_0^L - \left[\frac{q}{2} (L - x_1)^2 - (qL + H)(L - x_1) - P \frac{L}{2} \right] (L - x_1) dx_1 \\
 &\quad + (qL + H)L^3 \\
 &= - \left[-\frac{q}{24} (L - x_1)^4 + (qL + H) \frac{1}{3} (L - x_1)^3 + P \frac{L}{2} \frac{1}{2} (L - x_1)^2 \right]_0^L \\
 &\quad + (qL + H)L^3 \\
 &= -\frac{qL^4}{8} + \frac{qL + H}{3} L^3 + \frac{PL^3}{4} + (qL + H)L^3 \\
 &= \frac{29}{24} qL^4 + \frac{4}{3} HL^3 + \frac{1}{4} PL^3 \\
 \Rightarrow H &= -\frac{29}{32} qL - \frac{3}{16} P
 \end{aligned}$$

Einsetzen in F :

$$\boxed{F = \frac{3}{32} qL - \frac{3}{16} P}$$

Variante 5: Kombination von Standardlösungen



$$v_1 = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} \quad v_2 = -\frac{1}{2} \frac{PL^3}{2EI} \quad v_3 = -\frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI}$$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= \frac{F}{k} \\ \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} - \frac{1}{2} \frac{PL^3}{2EI} - \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI} &= \frac{FL^3}{EI} \\ \frac{1}{8} qL - \frac{1}{4} P &= \frac{4}{3} F \end{aligned}$$

$$F = \frac{3}{32} qL - \frac{3}{16} P$$

e)

$$v_B = \frac{F}{k} = \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{32} qL^4 - \frac{3}{16} PL^3 \right)$$

Aufgabe 3

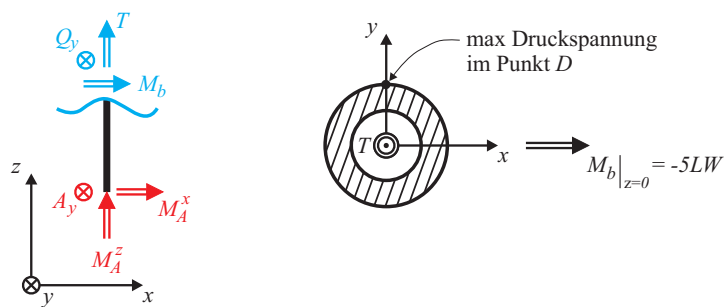
a)

$$I_x = \frac{\pi (R_a^4 - R_i^4)}{4}$$

$$I_p = \frac{\pi (R_a^4 - R_i^4)}{2} = 2 I_x$$

b)

Beanspruchung im vertikalen Laternenpfahl: $Q = W$, $T = LW$ und $M_b = Wz - 5LW$.



c)

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{xyz}$$

mit $M_b(z=0) = -5WL$ und $T(z=0) = WL$

$$\sigma_z = \frac{M_b}{I_x} y$$

$$= \frac{20WLR_a}{\pi (R_a^4 - R_i^4)} \quad \text{positives Vorzeichen!}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{T}{I_p} y$$

$$= \frac{2WLR_a}{\pi (R_a^4 - R_i^4)}$$

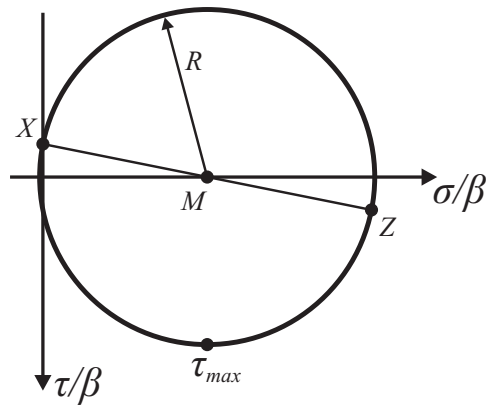
d)

Aus Aufgabenteil c) kennt man den Spannungstensor T:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{LWR_a}{\pi(R_a^4 - R_i^4)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

In der Musterlösung wird mit $\beta = \frac{LWR_a}{\pi(R_a^4 - R_i^4)}$ gerechnet.

Variante 1: Graphisch mit Mohrschem Kreis



$$M = 10\beta$$

$$R = 2\sqrt{26}\beta$$

$$\sigma_1 = M - R = (10 - 2\sqrt{26})\beta$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = M + R = (10 + 2\sqrt{26})\beta$$

Variante 2: Analytisch mit Eigenwertproblem

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 20 - \lambda \end{bmatrix} \beta = ((-\lambda)(-\lambda)(20 - \lambda) + 4\lambda)\beta^3 = \lambda(\lambda^2 - 20\lambda - 4)\beta^3 = 0$$

$$\sigma_1 = (10 - 2\sqrt{26})\beta$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = (10 + 2\sqrt{26})\beta$$

e)

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &= R = \sqrt{\left(\frac{\tau_{xz}}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\beta}\right)^2} \cdot \beta \\
 &= \sqrt{4 + 100} \cdot \beta \\
 &= 2\sqrt{26} \cdot \beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &\stackrel{!}{\leq} \tau_{\text{krit}} \\
 \frac{2\sqrt{26}WLR_a}{\pi(R_a^4 - R_i^4)} &\leq \tau_{\text{krit}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{W \leq \frac{\tau_{\text{krit}} \pi (R_a^4 - R_i^4)}{2\sqrt{26}LR_a}}$$